Ueber lineare Differentialgleichungen mit bekanntem linearen Multiplikator

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BASEL

VORGELEGT VON

Albert Grübel
aus **Basel**

ZÜRICH □ 1912
Dissert.-Druckerei Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64

Ueber lineare Differentialgleichungen mit bekanntem linearen Multiplikator

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BASEL

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

VORGELEGT VON

Albert Grübel
aus **Basel**

ZÜRICH □ 1912
Dissert.-Druckerei Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. Fueter und Dr. Von der Mühll.

Basel, den 12. Febr. 1912.

Rud. Fueter, Dekan.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung . . . . . Seite 5

I. Abschnitt.

Die linearen Multiplikatoren einer linearen Differentialgleichung n. Ordnung.

§ 1. Definition der Multiplikatoren und formale Folgerungen . „ 9
§ 2. Aequivalenz des definierten mit einem andern Begriffe . „ 13
§ 3. Darstellung der Multiplikatoren . . . . . „ 18
§ 4. Integration einer Differentialgleichung mit bekanntem linearen Multiplikator . . . . . „ 24
§ 5. Nachweis der Existenz der geforderten Integrale . . „ 32

II. Abschnitt.

Das Multiplikatorensystem eines Systems linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung.

§ 6. Definition und Darstellung der Multiplikatorensysteme . „ 37
§ 7. Die Gesamtheit der Differentialsysteme mit gegebenem Multiplikatorensystem . . . . . „ 45
§ 8. Integration der Differentialsysteme mit gegebenem Multiplikatorensystem . . . . . „ 49

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546706_0117

Einleitung

(1) $$P(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, y^{(k)} = 0$$

sei eine lineare Differentialgleichung n. Ordnung, in der die Koeffizienten als analytische Funktionen der (komplexen) Variabeln x gedacht werden. Soll die Funktion z von x, zur linken Seite von (1) als Faktor hinzugefügt, diese zu einem exakten Differentialquotienten machen, so muss sie der „*adjungierten Differentialgleichung*“ von (1)

(1′) $$P'(z) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (p_{n-k}\, z)^{(k)} = 0$$

genügen [1]). Umgekehrt liefert jedes Integral von (1′) einen (gewöhnlichen) Multiplikator von (1). P' nennen wir den zu P *adjungierten Differentialausdruck* [2]). Bilden

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n$$

ein Fundamentalsystem von (1), d. h. ein System linear unabhängiger Integrale, so hat man in

$$z_k = \frac{1}{p_0} \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots & y_{k-1}, & y_{k+1}, & \ldots & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots & y_{k-1}', & y_{k+1}', & \ldots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots & y_{k-1}^{(n-2)}, & y_{k+1}^{(n-2)}, & \ldots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

ein Fundamentalsystem von (1′) und zwar das *adjungierte Fundamentalsystem* zum erstgenannten. (1) und (1′) sind mit

[1]) Vgl. für den Begriff adjungierter Differentialgleichungen etwa Darboux, Théorie des surfaces, t. II. chap. V.

[2]) Den adjungierten Differentialausdruck zu einem gegebenen bezeichnen wir stets durch einen Akzent.

einander verbunden durch eine charakteristische Identität, die sog. *Lagrange'sche Identität*, aus der alle Beziehungen zwischen adjungierten Differentialgleichungen abgeleitet werden können,

$$z\,P(y) - y\,P'(z) = \frac{d}{dx} P(y, z) \tag{2}$$

(y und z unbestimmte Variable). $P(y, z)$ ist hierin der „*begleitende Bilinearausdruck*"; explicit lautet er

$$\begin{aligned} P(y, z) = {} & y^{(n-1)}\,[p_0\, z] \\ & + y^{(n-2)}\,[p_1\, z - (p_0\, z)'] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + y^{(n-2)}\,[p_{(n-1)}\, z - (p_{(n-2)} z)' + \ldots . (-1)^{(n-1)} (p_0\, z)^{(n-1)}]. \end{aligned}$$

Zwischen den y_i und z_k bestehen die n^2 Relationen $P(y_i, z_k) = \delta_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \ldots n$) ($\delta_{ik} = 0$, falls $i \neq k$; $\delta_{ik} = 1$, falls $i = k$).

(2) zeigt unmittelbar, dass die adjungierte der adjungierten Differentialgleichung die ursprüngliche Differentialgleichung ist, dass also

$$(P')' = P.$$

Soll das Fundamentalsystem der y_i zugleich Fundamentalsystem von (1′) sein, so muss

$$P'(y) = s(x)\, P(y)$$

sein. Die Vergleichung der Glieder höchster Ordnung zeigt aber, dass

$$s(x) = (-1)^n.$$

Es gibt also zwei Klassen „*autoadjungierter Differentialgleichungen*"; solche für die

$$P'(y) = +P(y)$$

und also

$$z\,P(y) - y\,P(z) = \frac{d}{dx} P(y, z)$$

und solche für die

$$P'(y) = -P(y)$$

und also

$$z\,P(y) + y\,P(z) = \frac{d}{dx} P(y, z).$$

Die erste Klasse, deren sich schon *Jacobi* zur Umformung der zweiten Variation bedient hatte, wurde einer genauern Betrach-

tung unterzogen von *Frobenis.* [1]) Wir nennen sie *„positiv autoadjungiert.“* Die zweite Klasse behandelte *Darboux.* [2]) Wir nennen sie *„negativ autoadjungiert.“*

Eine Verallgemeinerung autoadjungierter Differentialgleichungen sind Differentialgleichungen, die mit ihrer Adjungierten zu derselben Art gehören. Solche wurden schon mehrfach behandelt, insbesondere hat *G. Fano* [3]) ihre Rationalitätsgruppe untersucht; doch scheint das Integrationsproblem im engern Sinne noch nicht behandelt worden zu sein. Die vorliegende Arbeit gibt einen Beitrag zur Ausfüllung dieser Lücke, indem sie den Umstand verwertet, dass bei den genannten Differentialgleichungen der transformierende Differentialausdruck als linearer Multiplikator auftritt, worauf schon *Halphén* in einer kurzen Note der Comptes rendus [4]) hinweist. Die Identität, die den Multiplikator als solchen definiert, spielt dabei dieselbe zentrale Rolle wie die erwähnte Lagrange'sche Identität in der Theorie autoadjungierter Differentialgleichungen.

Hier wird der Begriff des linearen Multiplikators einer linearen homogenen Differentialgleichung n. Ordnung an die Spitze gestellt. § 1 enthält seine Definition und die aus ihr fliessenden formalen Folgerungen. Es gelingt, hierbei den in der Definitionsgleichung auftretenden Bilinearausdruck in eleganter Weise durch Multiplikatoren darzustellen, ein Resultat, das im einfachsten Falle schon *L. Fuchs* bekannt war. § 2 schlägt die Brücke zu den Differentialgleichungen, die mit ihrer Adjungierten zu derselben Art gehören. Der vorbereitende Satz dieses Paragraphen findet sich schon bei *L. Fuchs* als selbständiges Resultat; hier wird ein neuer Beweis gegeben. Im § 3 werden die Multi-

[1]) Crelles Journal, Bd. 85. Über adjungierte lineare Differentialausdrücke. p. 185.

[2]) a. a. O.

[3]) Atti della R. Accademia di Torino Vol., 34, pag. 260. Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte.

[4]) C. R., Vol. 101, pag. 664. Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires.

plikatoren durch die Elemente eines Fundamentalsystems der Adjungierten, die ja als die ursprüngliche Differentialgleichung angesehen werden kann, dargestellt; ihre Mannigfaltigkeit wird klargelegt und zum Schluss ein charakteristisches System linearer Differentialgleichungen I. Ordnung für die Koeffizienten eines Multiplikators hergeleitet. Die Integration linearer Differentialgleichungen mit bekanntem linearen Multiplikator wird in § 4 und § 5 geleistet. Im II. Abschnitt endlich werden die Resultate auf *Systeme linearer Differentialgleichungen I. Ordnung*, Differentialsysteme, zu übertragen versucht. An die Stelle des linearen Multiplikators tritt dann ein System von Linearformen, ein *Multiplikatorensystem*, wie wir es nennen. Die Übertragung gelingt vollständig, doch umfasst dann die Annahme „es existiert ein Multiplikatorensystem mit Koeffizientien des Rationalitätsbereiches“ nur *den* Fall von Differentialsystemen, die mit dem adjungierten zu derselben Art gehören, wo die Multiplikatorenmatrix symmetrisch oder alternierend ist. Die betreffenden Differentialsysteme lassen sich leicht übersehen. Sie können abgeleitet werden aus autoadjungierten Differentialsystemen, welche den autoadjungierten Differentialgleichungen n. Ordnung analog sind und die wieder in zwei Klassen zerfallen. Von den letztgenannten Differentialsystemen scheinen bis jetzt nur die hier als negativ autoadjungierten bemerkt worden zu sein. [1])

[1]) Vgl. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, p 34.

I. Abschnitt.

Die linearen Multiplikatoren einer Differentialgleichung n. Ordnung.

§ 1. Definition der Multiplikatoren und formale Folgerungen.

Wir nennen $Q(y) \equiv \sum_{\lambda=0}^{n-1} q_\lambda y^{(\lambda)}$

einen linearen *Multiplikator* von

$$P(y) \equiv \sum_{\lambda=0}^{n} p_{n-\lambda} y^{(\lambda)} = 0,$$

wenn für unbestimmtes y und z

$$(1) \qquad Q(z) P(y) \pm Q(y) P(z) = \frac{d}{dx} S(y, z),$$

wo $S(y, z)$ ein bilinearer Ausdruck von y und z. Gilt in (1) das obere Zeichen, so heisst $Q(y)$ *symmetrischer*, im andern Falle *alternierender Multiplikator* von $P(y)$. $S(y, z)$ ist der *begleitende Bilinearausdruck* oder die *Komitante*.

Die Identität (1) lässt sich in eine Identität zwischen Differentialausdrücken umwandeln [1]). Ersetzt man nämlich in der Identität

$$z P(y) - y P'(z) = D P(y, z)$$

z durch $Q(z)$, so erhält man

$$Q(z) P(y) - y P' Q(z) = D P[y, Q(z)]$$

und durch Vertauschung von y und z

$$Q(y) P(z) - z P' Q(y) = D P[z, Q(y)],$$

[1]) Über das Rechnen mit linearen Differentialausdrücken siehe die p. 7 genannte Abhandlung von Frobenius. — Im folgenden wird für die Operation $\frac{d}{dx}$ öfters das Zeichen D verwendet und unter AB derjenige Differentialausdruck verstanden, der aus dem Differentialausdruck B hervorgeht, indem man auf ihn den Differentialausdruck A anwendet.

woraus

$$Q(z)\,P(y) \pm Q(y)\,P(z) \mp [z\,P'Q(y) \pm y\,P'Q(z)] = D\,R(y,z).$$

$R(y,z)$ ist ein bilinearer homogener Differentialausdruck. Benützt man (1), so erhält man

$$z\,P'Q(y) \pm y\,P'Q(z) = \pm D\,[S(y,z) - R(y,z)]$$

d. h. $P'Q$ ist sich selbst adjungiert. Wird umgekehrt letzteres vorausgesetzt, so folgt, dass

$$Q(z)\,P(y) \pm Q(y)\,P(z)$$

einem exakten Differentialquotienten gleich ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein homogener linearer Differentialausdruck Q symmetrischer (alternierender) Multiplikator eines zweiten P wird, ist [1])

$$(1') \qquad \underline{P'Q \pm Q'P \equiv 0.}$$

Nun gilt für beliebige Differentialausdrücke A und B

$$(A\,B)' = B'A'$$

und

$$(A')' = A,$$

so dass (1′) auch so ausgedrückt werden kann: Bei einem symmetrischen (alternierenden) Multiplikator muss $P'Q$ mit dem adjungierten Ausdruck bis auf das Zeichen übereinstimmen (identisch sein). Im ersten Falle muss er also von ungerader, im zweiten Falle von gerader Ordnung sein; d. h. (da die Ordnung eines zusammengesetzten Differentialausdruckes gleich der Summe der Ordnungen der Komponenten ist) *die symmetrischen Multiplikatoren einer Differentialgleichung n. Ordnung können bloss von den Ordnungen*

$$\underline{n-1,\ n-3,\ n-5,\ \ldots.}$$

die alternierenden Multiplikatoren bloss von den Ordnungen

$$\underline{n-2,\ n-4,\ n-6,\ \ldots.}$$

sein.

Aus (1′) lassen sich unmittelbar einige Folgerungen ziehen: Da Q von kleinerer Ordnung als P angenommen ist, so ist nach einem bekannten Algorithmus [2])

[1]) Vgl. L. Fuchs, Berl. Akad. Berichte, 1888 II., p. 1274.

[2]) Vgl. etwa Schlesinger, Handbuch I, p. 43.

(2) $$P = AQ + Q_1$$

wo A ein nicht verschwindender Differentialausdruck ist. Setzt man (2) in (1′) ein, so erhält man

$$[Q'(A' \pm A)Q] \pm [Q_1'Q \pm Q'Q_1] = 0$$

Wäre $A' \pm A' = 0$, so wäre die erste Klammer ein Differentialausdruck von höherer Ordnung als der zweite, und zwei Differentialausdrücke verschieden hoher Ordnung gäben zusammen Null. Dieser Widerspruch lehrt die Existenz der Gleichungen

(3) $$A' \pm A = 0$$
$$Q'Q_1 \pm Q_1'Q = 0$$

d.h. A ist negativ (positiv) autoadjungiert und Q_1 ist ein symmetrischer (alternierender) Multiplikator von Q. Umgekehrt haben diejenigen Ausdrücke P, die aus Q nach der Anweisung (2) gebildet sind vermittels solcher Ausdrücke A und Q_1, die (3) genügen, den symmetrischen (alternierenden) Multiplikator Q.

Jetzt lässt sich auch die Frage nach *Multiplikatoren höherer oder gleicher Ordnung* wie P erledigen: Die Definitionsgleichung

$$Q(z)P(y) \pm Q(y)P(z) = \frac{d}{dx}S(y,z)$$

sagt dann aus, dass die Differentialausdrücke P und Q einfach die Rollen tauschen, so dass dann

$$Q = AP + Q_1,$$

wo A negativ (positiv) antoadjungiert und Q_1 ein symmetrischer (alternierender) Multiplikator von geringerer Ordnung als n. *Die Multiplikatoren höherer oder gleicher Ordnung unterscheiden sich also von denen niederer Ordnung um den Bestandteil AP, in welchem*

$$\underline{A' \pm A = 0.}$$

Für den *Bilinearausdruck* lässt sich auf Grund der vorhergehenden Entwicklungen eine einfache Gestalt angeben. Setzt man in die Definitionsgleichung

$$DS(y,z) = Q(z)P(y) \pm Q(y)P(z)$$
$$P = AQ + Q_1$$

ein, so erhält man

$$DS(y,z) = Q(z)AQ(y) + Q(y)AQ(z) \pm Q_1(z)Q(y) \pm Q_1(y)Q(z)$$

$S_1(y, z)$ sei die zu Q und Q_1 gehörende Komitante und der autoadjungierte Differentialausdruck A besitze den zugehörigen Bilinearausdruck $A(y, z)$

$$z\,A(y) \pm y\,A(z) = D\,A(y, z).$$

Dann ist

$$D\,S(y, z) = D\,A[Q(y), Q(z)] \pm D\,S_1(y, z) \text{ und}$$
$$S(y, z) = A[Q(y), Q(z)] \pm S_1(y, z).$$

Die gleiche Betrachtung auf Q und Q_1 usw. angewendet, ergibt

$$S_1(y, z) = B[Q_1(y), Q_1(z)] \pm S_2(y, z)$$

. . . . . .

$$S_h(y, z) = H[Q_h(y), Q_h(z)] \pm S_{h+1}(y, z).$$

Hierin nehmen die S_i und Q_i mit wachsendem i in der Ordnung ab. Ein S_i muss also verschwinden, z. B. $S_{h+1}(y, z) \equiv 0$. Die Komposition der letzten $h + 1$ Gleichungen ergibt

$$S(y,z) = A[Q(y), Q(z)] \pm B[Q_1(y), Q_1(z)] + \ldots \pm H[Q_h(y), Q_h(z)]$$

Mit T ist $-T$ zugleich negativ (positiv) autoadjungiert. *Der begleitende Bilinearausdruck $S(y, z)$, der zu einem symmetrischen (alternierenden) Multiplikator Q von P gehört, lässt sich also darstellen in der Gestalt*

$$S(y,z) = A[Q(y), Q(z)] + B[Q_1(y), Q_1(z)] + \ldots + H[Q_h(y), Q_h(z)]$$

in welcher $A(y, z)$, $B(y, z)$, ... $H(y, z)$ bilineare Ausdrücke sind, die zu negativ (positiv) autoadjungierten Differentialausdrücken gehören und jedes Q_i symmetrischer (alternierender) Multiplikator von Q_{i-1} ist. Die einfachste Gestalt, deren $S(y, z)$ im Falle eines symmetrischen Multiplikators fähig ist, tritt ein, wenn

$$Q(y), Q_1(y), \ldots . Q_h(y), Q_{h+1}(y) \equiv 0$$

die Ordnungen

$$n-1,\ n-2, \ldots . n-h-1$$

haben. Dann ist $A(y)$ autoadjungiert und von der ersten Ordnung, also [1]) ausdrückbar durch

$$A(y) = a_0\,D\,a_0(y), \quad (a_0 \text{ beliebig}),$$

und $A(y, z) = a_0^2\,y\,z$. Ebenso ist

[1]) Darboux, Surfaces, Vol. II., p. 113.

$$B(y, z) = a_1^2\, y\, z$$

. . . . . .

$$H(y, z) = a_h^2\, y\, z \text{ und endlich}$$

$$S(y, z) = \sum_i a_i^2\, Q_i(y)\, Q_i(z). \tag{4}$$

Diese Gleichung ist schon von *L. Fuchs* [1]) angegeben worden.

Im Falle eines alternierenden Multiplikators erhält man die einfachste Gestalt, wenn

$$Q(y),\ Q_1(y),\ \ldots.\ Q_h(y),\ Q_{h+1}(y) \equiv 0 \text{ die Ordnung}$$
$$n-2,\ n-4,\ \ldots.\ n-2h-2$$

haben. Dann ist

$$S(y, z) = \sum_i a_i^2\, [Q_i(z)\, D\, Q_i(y) - Q_i(y)\, D\, Q_i(z)]$$

§ 2. Aequivalenz des definierten mit einem andern Begriffe.

Bevor wir auf den Hauptinhalt dieses Paragraphen eingehen, beweisen wir:

Besitzt eine lineare homogene Differentialgleichung $P(y) = 0$ *zwei Multiplikatoron* $Q(y)$ *und* $R(y)$, *deren Koeffizienten demselben Rationalitätsbereiche angehören wie die Koeffizienten von* $P(y)$ *und zwischen denen keine Identität*

$$Q(y) \equiv \text{konst. } R(y)$$

besteht, so ist $P(y)$ *reduzibel.*

Eine Differentialgleichung nennen wir *reduzibel*, wenn sie mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung, deren Koeffizienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, ein Integral gemein hat; andernfalls nennen wir sie irreduzibel. Die Frage der Reduzibilität setzt also immer die Definition eines *Rationalitätsbereiches* voraus [2])

Denkt man sich in die beiden Multiplikatoren für y eine Lösung der Gleichung $P(y) = 0$ eingesetzt, so sind

$$z = Q(y) \text{ und } \zeta = R(y) \tag{1}$$

[1]) a. a. O., p. 1126.

[2]) Schlesinger, Vorlesungen, p. 104.

Integrale der adjungierten Gleichung

$$P'(z) = 0$$

In (1) werde nun an Stelle von y ein Fundamentalsystem y_i $(i = 1, 2, \ldots . n)$ eingesetzt; man erhalte

$$z_i = Q(y_i),\ \zeta_i = R(y_i)\ (i = 1, 2, \ldots . n)$$

Bildeten die z_i kein Fundamentalsystem von $P'(z) = 0$, so gäbe es ein System nicht zugleich verschwindender Konstanten C_i von der Art, dass

$$\sum_{i=1}^{n} C_i z_i = Q\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right) = 0.$$

Dann hätte $P(y) = 0$ mit $Q(y) = 0$ ein Integral gemein, wäre also reduzibel. Ebenso wird $P(y)$ reduzibel, wenn die ζ_i kein Fundamentalsystem bilden. Bilden aber sowohl die z_i als die ζ_i ein Fundamentalsystem, so stehen diese zu einander in der Beziehung

$$\zeta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k\ (i = 1, 2, \ldots . n) \text{ wo } |a_{ik}| =|= 0$$

oder

(2) $$R(y_i) - Q(\eta_i) = 0\ (i = 1, 2, \ldots . n),$$

wo man abkürzend

(2′) $$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k$$

gesetzt hat. Die Gleichungen (2) denken wir uns mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2, \ldots . c_n$ multipliziert und addiert.

$$R\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\right\} - Q\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i\right\} = 0.$$

Die c_i wählen wir so, dass

(3) $$\sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i = \omega \sum_{i=1}^{n} c_i y_i,$$

wo ω eine noch zu bestimmende Konstante. Setzen wir für η_i seinen Wert aus (2′) ein, so erhält man zur Bestimmung der c_i

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k a_{ki}\right\} y_i = \omega \sum_{i=1}^{n} c_i y_i.$$

Da aber die y_i ein Fundamentalsystem bilden, so zerfällt diese Relation in die n Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\, a_{ki} = \omega\, c_i \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

ausgeschrieben

$$\begin{array}{l} c_1\,(a_{11} - \omega) + c_2\, a_{21} + \ldots . + c_n\, a_{n1} = 0 \\ c_1\, a_{12} + c_2\,(a_{22} - \omega) + \ldots . + c_n\, a_{n2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1\, a_{1n} + c_2\, a_{2n} + \ldots . + c_n(a_{nn} - \omega) = 0. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt dann und nur dann ein nicht zugleich verschwindendes Lösungssystem $c_1, c_2, \ldots c_n$, wenn ω so gewählt wird, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{21} \ldots\ldots . a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \omega \ldots a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung besitzt aber von Null verschiedene Wurzeln, da ja ihr konstantes Glied

$$|a_{ik}| \neq 0.$$

Es ist also eine solche Wahl von ω und damit der c_i möglich, dass Gleichung (3) besteht. Dann hat aber die Differentialgleichung $P(y) = 0$ mit der Differentialgleichung $(n-1)$ Ordnung.

(4) $$R(y) - \omega\, Q(y) = 0,$$

welche Koeffizienteu desselben Rationalitätsbereiches besitzt, das Integral

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i$$

gemein. Ein identisches Verschwinden von (4) ist nach der gemachten Annahme unmöglich. $P(y)$ ist also *reduzibel* [1])

Hat man eine lineare homogene Differentialgleichung n. Ordnung $U(y) = 0$, deren Koeffizienten einem Rationalitätsbereiche R angehören, so genügt jeder Ausdruck

(5) $$z = a_0\, y + a_1\, y' + \ \ldots + a_{n-1}\, y^{(n-1)},$$

---

[1]) Vgl. den Beweis von Fuchs durch Anwendung eines Satzes von Frobenius, Berlin. Akad. Ber., 1888 II. p. 1277.

wo $a_0, a_1, \ldots . a_{n-1}$ auch R angehören und y das allgemeine Integral von $P(y) = 0$ ist, einer linearen homogenen Differentialgleichung n. oder niederer Ordnung mit R angehörenden Koeffizienten. Man sagt von dieser neuen Differentialgleichung $V(z) = 0$, sie *„gehöre mit* $U(y) = 0$ *zu derselben Art"*. Die sämtlichen mit $U = 0$ zu derselben Art gehörenden Differentialgleichungen n. Ordnung sind mit $U = 0$ gleichberechtigt und sind mit dieser Differentialgleichung irreduzibel oder nicht. [1])

Es wird im folgenden angenommen, die Art zu welcher $P(y) = 0$ gehört, sei *irreduzibel* in R. Ferner besitze $P(y)$ einen Multiplikator $Q(y)$ mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches R. Aus der Definitionsgleichung

$$Q(v)\, P(u) \pm Q(u)\, P(v) = D\, S(u, v)$$

geht für $v = y$, y eine Lösung von $P = 0$, hervor

$$Q(y)\, P(u) = \frac{d}{dx} S(u, y).$$

$Q(y)$ zu $P(u)$ als Faktor hinzugefügt macht also $P(u)$ zu einem exakten Differentialquotienten. Es ist also $z = Q(y)$ eine Lösung der adjungierten Gleichung $P'(y) = 0$. D. h. *existiert ein Multiplikator mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches, so sind* $P = 0$ *und* $P' = 0$ *von derselben Art.*

Gehören umgekehrt $P(y) = 0$ und $P'(z) = 0$ zu derselben Art, ist also

$$z = Q(y),$$

so verschwindet $P'\, Q(y)$, falls y eine Lösung von $P = 0$. Wird aber ein Differentialausdruck A durch die sämtlichen Lösungen eines Differentialausdruckes B von niederer Ordnung befriedigt, so ist

$$A = R\, B$$

wo R ein Differentialausdruck, dessen Ordnung gleich der Differenz der Ordnungen von A und B. [2]) Gehören A und B einem Rationalitätsbereiche an, so gehört auch R zu demselben Bereiche. Es ist also

(6) $$P'\, Q = R\, P,$$

[1]) Schlesinger, Handbuch oder L. Fuchs, a. a. O., p. 1274.

[2]) Schlesinger, Handbuch I, p. 45.

wo R von derselben Ordnung wie Q ist. Nimmt man aber von (6) die adjungierten Ausdrücke, so erhält man

$$Q'P = P'R'. \tag{7}$$

D. h. der Ausdruck $\zeta = R'(y)$ ist auch ein Integral der Gleichung $P'(z) = 0$, wenn y eine Lösung von $P(y) = 0$ ist. Sind aber $Q(y)$ und $R'(y)$ jedesmal dann Lösungen von $P' = 0$, wenn y eine Lösung von $P = 0$ ist, so lässt sich, wie vorher gezeigt wurde, aus einem Fundamentalsystem $y_i (i = 1, 2, \ldots n)$ immer ein Integral η berechnen, für das

$$Q(\eta) - \omega R'(\eta) = 0 \quad (\omega = \text{const.}) \tag{8}$$

Der Differentialausdruck $Q - \omega R'$ muss aber identisch verschwinden; sonst hätte ja $P = 0$ mit

$$Q(y) - \omega R'(y) = 0$$

ein Integral η gemein. Dies widerspricht der Irreduzibilität. Es ist also

$$Q = \omega R', \text{ woraus}$$

$$Q' = \omega R$$

und damit aus (7)

$$P'Q = \omega Q'P.$$

Eine solche Gleichung zwischen Differentialausdrücken ist aber falls Q von $(n-2\lambda-1)$. Ordnung nur möglich für $\omega = -1$, und falls Q von $(n-2\lambda)$. Ordnung für $\omega = +1$. Also gilt

$$P'Q \pm Q'P = 0.$$

Das besagt aber, *dass Q symmetrischer (alternierender) Multiplikator von P ist. Haben wir also einen Rationalitätsbereich festgelegt, so sind für eine in diesem Bereiche irreduzible Differentialgleichung die Begriffe „die Differentialgleichung besitzt einen linearen Multiplikator mit Koeffizienten des Bereiches“* und *„die Differentialgleichung gehört mit ihrer Adjungierten zu derselben Art“ aequivalent.* Insbesondere stellt der symmetrische (alternierende) Multiplikator den transformierenden Ausdruck dar, der von $(n - 2\lambda - 1)$. resp. $(n-2\lambda)$. Ordnung ist.

§ 3. Darstellung der Multiplikatoren.

Der in der Definitionsgleichung

$$(1) \qquad Q(z)\,P(y) \pm Q(y)\,P(z) = \frac{d}{dx}\,S(y,z)$$

auftretende, begleitende Bilinearausdruck

$$S(y,z) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} t_{ik}\,y^{(i)}z^{(k)}$$

lässt sich als bilineare Form mit den Variabeln

$$y, y', \ldots . y^{(n-1)}$$
$$z, z', \ldots . z^{(n-1)}$$

auffassen. Eine solche lässt sich aber auf die Gestalt

$$S(y,z) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{ik}\,L_i(y)\,L_k(z)$$

bringen, wo die $L_i(y)$ n beliebige Polynome sind, welche die Variabeln $y, y', \ldots . y^{(n-1)}$ linear und homogen enthalten und der einzigen Bedingung genügen, dass sie in Bezug auf diese Variable linear und unabhängig sind.[1]) Es seien y_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ ein Fundamentalsystem von $P = 0$ und z_i $(i = 1, 2, \ldots . n)$ das adjungierte Fundamentalsystem. Wir wählen

$$L_i(y) = P(y, z_i) \quad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

$P(y,z)$ ist definiert durch die Identität

$$z\,P(y) - y\,P'(z) = \frac{d}{dx}\,P(y,z)$$

und hat die charakteristische Eigenschaft [2])

$$P(y_i, z_k) = \delta_{ik}$$

Diese Wahl ist erlaubt, da die n Differentialausdrücke $P(y,z_i)$ linear unabhängig sind. Gäbe es nämlich eine Relation

$$\sum_{i=1}^{n} \varsigma_i\,P(y,z_i) = 0,$$

---

[1]) In der Tat verlangt die geforderte Darstellung die Auflösung der Matricesgleichung $(s_{ik}) = (l_{ki})(a_{ik})(l_{ik})$ nach (a_{ik}), was immer möglich ist, so lange als $|l_{ik}| = |= 0$ d. h. die $L_i(y)$ linear unabhängig sind.

[2]) Siehe Einleitung.

wo die $\varsigma_i(x)$ ein nicht zugleich verschwindendes System bilden, so beständen auch, wenn man

$$y = y_k \quad (k = 1, 2, \ldots . n)$$

setzte, die n Gleichungen

$$\sum_i \varsigma_i P(y_k, z_i) = 0 \quad (k = 1, 2. \ldots . n)$$

oder

$$\varsigma_1 = 0, \varsigma_2 = 0, \ldots . \varsigma_n = 0,$$

was widerspruchsvoll ist. Es ist also die Darstellung möglich

$$S(y,z) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} P(y, z_i) P(y, z_k). \tag{2}$$

Im Falle eines symmetrischen (alternierenden) Multiplikators ist $S(y, z)$ symmetrisch (alternierend), also

$$a_{ik} = a_{ki} \text{ resp. } a_{ik} = -a_{ki}.$$

Setzt man in (2) für y und z zwei Integrale y_i und y_k der Gleichung $P(y) = 0$ ein, so wird

$$S(y_i, y_k) = a_{ik},$$

während sich aus (1) ergibt

$$S(y_i, y_k) = \text{const.}$$

Die a_{ik} sind also *Konstante*. Differentiert man (2) und berücksichtigt man, dass

$$\frac{d}{dx} P(y, z_i) = z_i P(y),$$

so ergibt sich als *allgemeinsten Ausdruck eines Multiplikators*

$$Q(y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} z_i P(y, z_k) \tag{3}$$

Hierin sind die a_{ik} beliebige Konstante mit der Eigenschaft

$$a_{ik} \mp a_{ki} = 0.$$

Gilt das obere Zeichen, so ist der Multiplikator ein *symmetrischer*, andernfalls ein *alternierender*. Der *begleitende Bilinearausdruck* lautet

$$S(y,z) = \sum_{,i=k1}^{n} a_{ik} P(y, z_i) P(y, z_k) \tag{4}$$

Zu jedem Multiplikator gehört also nach Wahl eines Fundamentalsystems von $P(y) = 0$ eine ganz bestimmte Matrix (a_{ik}). Die Koeffizienten von P und Q mögen einem bestimmten Rationalitätsbereiche angehören. Setzen wir nun $P = 0$ als irreduzibel in Bezug auf diesen Bereich voraus, so lässt sich zeigen, dass die Matrix *nichtsingulär* ist, dass also ihre Determinante nicht verschwindet. Es ist nämlich nach (3)

$$Q(y_i) = a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + \ldots + a_{in} z_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Wäre nun $a_{ik} = 0$, so könnten nicht zugleich verschwindende Konstante $C_1, C_2, \ldots C_n$ bestimmt werden, so dass

$$Q(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n) = 0,$$

was der Irreduzibilität widerspricht.

Erfahren die y_i lineare Transformationen mit konstanten Koeffizienten

$$(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots \overline{y}_n) = (C_{ik})(y_1, y_3, \ldots y_n),$$

wo $C_{ik} \neq 0$, so erfährt das adjungierte Fundamentalsystem die Transformation

$$(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots \overline{z}_n) = (C_{ki})^{-1}(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

und die Matrix (a_{ik}) wird kogredient transformiert. Durch geeignete Wahl der (C_{ik}) kann man also (3) und (4) auf die *kanonischen Gestalten*

$$(3') \qquad Q(y) = \sum_{i=1}^{r} z_i P(y, z_i)$$

$$(4') \qquad S(y, z) = \sum_{i=1}^{r} P(y, z_i) P(z, z_i)$$

bringen. r ist darin der Rang der Matrix (a_{ik}). Die

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

in (3) auftretenden Differentialausdrücke

$$z_i P(y, z_i) \text{ und } z_i P(y, z_k) + z_k P(y, z_i)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots n\,;\ i < k)$$

sind selber symmetrische Multiplikatoren, wie aus (3) hervorgeht, wenn man darin für beliebiges, aber bestimmt gewähltes i und k

$$a_{ik} = a_{ki} = 1$$

und die übrigen a_{ik} gleich Null setzt. Ebenso sind die

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Differentialausdrücke

$$z_i P(y, z_k) - z_k P(y, z_i)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots . n; i < k)$$

alternierende Multiplikatoren von $P(y)$. *Es bilden also die symmetrischen (alternierenden) Multiplikatoren eine*

$$\frac{(n+1)n}{2} \quad \text{resp.} \quad \frac{n(n-1)}{2}$$

fache Schar.

Wir wollen nun den Aufbau eines Multiplikators betrachten, um daraus ein *System von Differentialgleichungen zu gewinnen, das seine Koeffizienten charakterisiert.* Damit wird sich zugleich eine notwendige und hinreichende *Bedingung dafür ergeben, dass ein dem Rationalitätsbereiche angehöriger Multiplikator existiert.* Es sei

$$P(y,z) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} S\lambda\,(z)\, y^{(\lambda)}.$$

Nach der auf Seite (6) explicit angegebenen Darstellung von $P(y, z)$ ist

$$S\lambda\,(z) = \sum_{\mu=0}^{n-\lambda-1} t_{\lambda\,\mu}\, z^{(\mu)},$$

Hierin setzen sich die $t_{\lambda\,\mu}$ aus den Koeffizienten von $P(y)$ und deren Ableitungen linear zusammen; ferner ist

$$t_{\lambda,\, n-\lambda-1} = p_0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots . n-1).$$

Es gilt also

$$Q(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_i \sum_{\lambda=1}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda-1} t_{\lambda\,\mu}\, z_k^{(\mu)}\, y^{(\lambda)} =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda-1} t_{\lambda\mu}\, y^{(\lambda)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_i z_k^{(\mu)}$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, z_i^{(\sigma)}\, z_k^{(\tau)} = s_{\sigma\tau}$$

setzt

$$(5)\qquad Q(y) = \sum_{\lambda=1}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-\lambda-1} t_{\lambda\mu}\, s_{0\mu}\, y^{(\lambda)},\ \text{ausgeschrieben}$$

$$\begin{aligned} Q(y) = {} & y\,[t_{00}\, s_{00} + t_{01}\, s_{01} + \ldots + t_{0\,n-1}\, s_{0\,n-1}] \\ & + y'[t_{10}\, s_{00} + t_{11}\, s_{01} + \ldots + t_{1\,n-2}\, s_{0\,n-2}] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y^{(n-2)}\,[t_{n-2\,0}\, s_{00} + t_{n-2\,1}\, s_{01}] \\ & + y^{(n-1)}\,[t_{n-1\,0}\, s_{00}]. \end{aligned}$$

Die Gesamtheit der Multiplikatoren erhält man, wenn die

$$s_{00},\ s_{01},\ \ldots\ s_{0\,n-1}$$

die ihnen zukommenden Werte durchlaufen. Sie genügen einem gewissen Differentialsystem: Aus

$$s_{\sigma\tau} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, z_i^{(\sigma)}\, z_k^{(\tau)} = \sum_{\substack{i,k=1\\(i\leqq k)}}^{n} a_{ik}\,[z_i^{(\sigma)} z_k^{(\tau)} \pm z_i^{(\tau)} z_k^{(\sigma)}]$$

erhält man

$$(6)\qquad \frac{d\, s_{\sigma\tau}}{d\, x} = s_{\sigma,\tau+1} + s_{\sigma+1,\tau}\quad (\sigma,\tau = 0, 1, \ldots n-1)$$

Hierin treten Grössen

$$s_{\lambda n}\ \text{ und }\ s_{n\lambda}\quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

auf, welche sich linear und homogen durch

$$s_{\lambda 0},\ s_{\lambda 1},\ s_{\lambda 2},\ \ldots\ s_{\lambda\,n-1}\ \text{ resp.}$$

$$s_{0\lambda},\ s_{1\lambda},\ \ldots\ s_{n-1\,\lambda}$$

ausdrücken lassen. Ist nämlich

$$P'(z) = \sum_{\alpha=0}^{n} \pi_{n-\alpha}\, z^{(\alpha)},\ \text{ so ist}$$

$$P'(z_k) = \sum_{\alpha=0}^{n} \pi_{n-\alpha}\, z_k^{(\alpha)}\ \text{ für }\ k = 1, 2, \ldots n,$$

also

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, z_i^{(\lambda)} \sum_{\alpha=0}^{n} \pi_{n-\alpha}\, z_k^{(\alpha)} = 0$$

oder

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \pi_{n-\alpha}\ s_{\lambda\alpha} = 0 \text{ und ebenso } \sum_{\alpha=0}^{n} \pi_{n-\alpha}\ s_{\alpha\lambda} = 0.$$

Die $s_{\sigma\tau}$ $(\sigma, \tau \leqq n-1)$ genügen also einem linearen Differentialsystem

$$(6') \qquad \frac{d\, s_{\sigma\tau}}{d\, x} = \sum_{\substack{\lambda,\mu=0 \\ \sigma \leqq \tau}}^{n \quad 1} a_{\lambda\mu}^{(\sigma\tau)}\, s_{\lambda\mu} \quad (\sigma, \tau = 0, 1, \ldots n-1)$$

Bei einem symmetrischen Multiplikator ist, da $a_{ik} = a_{ki}$

$$s_{\sigma\tau} = s_{\tau\sigma},$$

bei einem alternierenden Multiplikator ist, da $a_{ik} = -a_{ki}$

$$s_{\sigma\tau} = -s_{\tau\sigma}.$$

Das System (6′) enthält also im ersten Falle

$$\nu = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

im zweiten Falle

$$\nu = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

abhängige Variable und Gleichungen. In letztern Falle verschwinden nämlich die n Variabeln $s_{\sigma\sigma}$ und die Gleichungen

$$\frac{d\, s_{\sigma\sigma}}{d\, x} = s_{\sigma,\sigma+1} + s_{\sigma+1,\sigma}$$

treten nicht auf. Das System (6′) kann also, wenn man ein Fundamentalsystem $z_1, z_2, \ldots . z_n$ kennt, zur Berechnung der Multiplikatoren dienen. Hat man die Koeffizienten von $P'(y)$ als Funktionen eines Rationalitätsbereiches B vorausgesetzt, so ist *die notwendige und* (wie sich sofort zeigen wird) *auch hinreichende Bedingung dafür, dass ein Multiplikator, dessen Koeffizienten B angehören, existiert*: (6′) *muss ein Lösungssystem aufweisen, das dem Rationalitätsbereiche angehört.* [1])

Umgekehrt liefert jedes Lösungssystem (6′) solche $s_{\sigma\tau}$, die in einem Multiplikator auftreten. Die Grössen

$$z_i^{(\sigma)} z_k^{(\tau)} \pm z_i^{(\tau)} z_k^{(\sigma)} \quad (\sigma, \tau = 0, 1, \ldots . n-1)$$
$$\sigma \leqq \tau$$

[1]) Vgl. R. Fuchs, Ueber lin. homogene Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungierten zu derselben Art gehören. Crelles Journal, Bd. 123, pag. 57.

(i und k zwei Zahlen aus $1, 2, \ldots . n$) genügen nämlich (6), oder was dasselbe ist, (6′). Lässt man nun i und k alle Werte von $1, 2, \ldots . n$ durchlaufen und wird $i \leqq k$ angenommen, so hat man ν solcher Lösungssysteme. Diese bilden aber eine Integralmatrix von (6′). Wären nämlich die ν Lösungssysteme abhängig, so gäbe es nicht zugleich verschwindende Constante c_{ik} für die

$$\sum_{\substack{i,k=1 \\ (i \leqq k)}}^{n} c_{ik} \left\{ z_i^{(\sigma)} z_k^{(\tau)} \pm z_i^{(\tau)} z_k^{(\sigma)} \right\} = 0$$

oder

$$s_{\sigma\tau} = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} z_i^{(\sigma)} z_k^{(\tau)} = 0 \quad (\sigma, \tau = 0, 1, \ldots . n-1)$$

mit der Bedingung $c_{ik} = + c_{ki}$. Diese Gleichungen gelten auch für $\sigma > \tau$. In Matrizesform geschrieben, lauten sie

$$(s_{\sigma\tau}) = (z_\tau^{(\sigma)}) \, (c_{\sigma\tau}) \, (z_\sigma^{(\tau)}) = 0$$

woraus, da $|z_\tau^{(\sigma)}| \neq 0$

$$(c_{\sigma\tau}) = 0.$$

Das widerstreitet der Annahme, dass nicht alle c_{ik} verschwinden sollen. Das allgemeinste Lösungssystem von (6′) lautet also

$$s_{\sigma\tau} = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} z_i^{(\sigma)} z_k^{(\tau)} \quad \sigma, \tau = 0, 1, \ldots . n-1, \quad \sigma \leqq \tau$$

(α_{ik} willkürliche Konstante.)

§ 4. Integration einer Differentialgleichung mit bekanntem linearen Multiplikator.

Die Differentialgleichung $P(y) = 0$ sei im Rationalitätsbereich B irreduzibel und besitze den symmetrischen (alternierenden) Multiplikator $Q(y)$, dessen Koeffizienten dem Bereiche B angehören. Es bestehe also in y und z die Identität

(1) $$Q(z) \, P(y) \pm Q(y) \, P(z) = D \, S(y, z).$$

Von $P(y) = 0$ kenne man ein Integral y_1. Setzt man in (1) $z = y_1$, so wird

$$Q(y_1)\ P(y) = D\ S(y, y_1),$$

oder wenn man zur Abkürzung $z_1 = Q(y_1)$ setzt

$$P(y) = \frac{1}{z_1} D\ S(y, y_1). \tag{2}$$

Wie aus (1) hervorgeht ist $S(y_1, y_1)$ eine Konstante. Im Falle eines symmetrischen Multiplikators denken wir uns y_1 so gewählt, dass die Konstante

$$S(y_1, y_1) = 0.$$

Bei einem alternierenden Multiplikator tritt das von selber ein, da ja $S(y, z)$ in y und z alternierend ist. Bei dieser Wahl wird y_1 Integral der Differentialgleichung $(n-1)$. Ordnung

$$S(y, y_1) = 0.$$

Ihre linke Seite kann geschrieben werden

$$S(y, y_1) = P_1\ D\left(\frac{y}{y_1}\right), \tag{3}$$

wo P_1 ein Differentialausdruck $(n-2)$. Ordnung ist. (2) erhält also dadurch die Gestalt

$$P(y) = \frac{1}{z_1}\ D\ P_1\ D\left(\frac{y}{y_1}\right). \tag{4}$$

Was lässt sich über P_1 aussagen?

Vorerst lässt sich von diesem Differentialausdruck ein symmetrischer (alternierender) Multiplikator angeben:

Man wird zu diesem Zwecke (2) in (1) einsetzen und (1) auf P_1 umrechnen.

$$S(y, z) = \int \left\{ \frac{Q(z)}{z_1} D\ S(y, y_1) + \frac{Q(y)}{z_1} D\ S(z, y_1) \right\} dx.$$

woraus durch partielle Integration

$$S(y, z) = \frac{Q(z)}{z_1} S(y, y_1) \pm \frac{Q(y)}{z_1} S(z, y_1)$$

$$- \int \left\{ S(y, y_1)\ D \frac{Q(z)}{z_1} + S(z, z_1)\ D \frac{Q(y)}{z_1} \right\} dx$$

Der Differentialausdruck $D \frac{Q(y)}{z_1}$ verschwindet für $y = y_1$. Es

ist also

$$D\frac{Q(y)}{z_1} = \bar{Q}_1 D\left(\frac{y}{y_1}\right), \tag{5}$$

wo Q_1 ein Differentialausdruck gleicher Ordnung wie Q. Es wird also mit Verwendung von (3)

$$S(y,z) = \frac{Q(z)}{z_1} S(y,y_1) \pm \frac{Q(y)}{z_1} S(z,y_1) \tag{6}$$

$$-\int \left\{ \bar{Q}_1 D\left(\frac{z}{y_1}\right) . P_1 D\left(\frac{y}{y_1}\right) \pm Q_1 D\left(\frac{y}{y_1}\right) . P_1 D\left(\frac{z}{y_1}\right) \right\} d x.$$

Diese Gleichung besagt aber, wenn wir vorübergehend

$$D\left(\frac{y}{y_1}\right) = A(y)$$

setzen, dass $Q_1 A$ symmetrischer (alternierender) Multiplikator von $P_1 A$ ist. Es besteht also die Gleichung

$$\begin{aligned} (P_1 A)'(\bar{Q}_1 A) \pm (Q_1 A)'(P_1 A) &= 0 \quad \text{oder} \\ A'(P_1'\bar{Q}_1 \pm \bar{Q}_1' P_1) A &= 0, \quad \text{woraus} \\ P_1'\bar{Q}_1 \pm \bar{Q}_1' P_1 &= 0. \end{aligned}$$

D. h. P_1 *hat den symmetrischen (alternierenden) Multiplikator* Q_1. Q_1 hat dieselbe Ordnung wie Q; er kann also (wenn Q die Ordnung $(n-1)$, resp. $(n-2)$ hat) ein Multiplikator „höherer“ Ordnung sein. Nach pag. 11 ist dann

$$Q_1 = A_1 P_1 + Q_1,$$

wo $A_1 \pm A_1' \neq 0$ und Q_1 ein Multiplikator „niederer“ Ordnung von P_1 ist. Ist Q_1 ein Multiplikator „niederer“ Ordnung von P, so ist $A_1 = 0$. Q_1 kann nicht identisch verschwinden. Denn wäre

$$Q_1 = A_1 P_1,$$

so wäre nach (5)

$$D\frac{Q(y)}{z_1} = A_1 P_1 D\left(\frac{y}{y_1}\right)$$

oder

$$D\frac{Q(y)}{z_1} = A_1 S(y,y_1)$$

Setzt man hierin ein von y_1 linear unabhängiges Integral y_2 ein, für das die Konstante $S(y_2, y_1) = 0$, so ist

$$Q(y_2) - k\,Q(y_1) = 0 \text{ oder}$$
$$Q(y_2 - k\,y_1) = 0;$$

d. h. $P(y) = 0$ wäre reduzibel.

Der zu Q_1 und P_1 gehörende Bilinearausdruck sei $R_1(y, z)$ und der zu Q_1 und P_1 gehörende sei $S_1(y, z)$. Dann ist $R_1(y, z) = \pm A_1 \{P_1(y), P_1(z)\} + S_1(y, z)$.

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen in (6) ist nun gleich

$$\frac{d}{dx} R\left\{D\left(\frac{y}{y_1}\right), D\left(\frac{z}{y_1}\right)\right\}$$

Unter Verwendung der eben abgeleiteten Gleichung geht (6) über in

$$S(y, z) = \frac{Q(z)}{z_1} S(y, y_1) \pm \frac{Q(y)}{z_1} S(z, z_1)$$
$$\mp A_1 \left\{P_1 D\left(\frac{y}{y_1}\right), P_1 D\left(\frac{z}{y_1}\right)\right\} - S_1\left\{D\left(\frac{y}{y_1}\right), D\left(\frac{z}{y_1}\right)\right\}$$

woraus

$$(9)\quad S_1\left\{D\left(\frac{y}{y_1}\right), D\left(\frac{z}{y_1}\right)\right\} = \frac{Q(z)}{z_1} S(y, y_1) \pm \frac{Q(y)}{z_1} S(z, y_1)$$
$$\mp A_1 \{S y, y_1), S(z, y_1\} - S(y, z)$$

Damit ist auch der *Bilinearausdruck zu P_1 und Q_1* aufgestellt.

Die durchgeführte Entwicklung hat uns gezeigt, dass durch die Kenntnis eines gewissen Integrals y_1 und eines Multiplikators die Ordnung von $P(y)$ um zwei reduziert werden kann und sich ein Multiplikator der Gleichung $(n-2)$. Ordnung $P_1(y) = 0$ angeben lässt. Die Kenntnis eines weiteren (gewissen Bedingungen genügenden) Integrales y_2 von $P(y) = 0$, liefert ein Integral von $P_1(y) = 0$ und gestattet die Reduktion der Ordnung dieser Gleichung um zwei. Indem man so weiterfährt, erkennt man, *dass zur Zerlegung von $P(y)$ in Differentialausdrücke erster Ordnung ν Integrale nötig sind, falls die Differentialgleichung von der Ordnung $n = 2\nu$ oder $n = 2\nu + 1$ ist.*

Diese ν Integrale seien $y_1, y_2, \ldots . y_\nu$, die wir als linear unabhängig voraussetzen. *Welchen Bedingungen haben sie zu genügen?*

Eine Bedingung, nämlich

(10) $$S(y_1, y_1) = 0$$

wurde schon aufgestellt. Damit nun

$$y_{\lambda 1} = D\begin{pmatrix} y_\lambda \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda = 2, 3 \ldots . \nu)$$

$(\nu - 1)$ Integrale von $P_1(y) = 0$ sind, müssen die Integrale $y_{\lambda 1}$, wie aus (3) hervorgeht, noch die Gleichungen

(10′) $$S(y_\lambda, y_1) = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots . \nu)$$

erfüllen. Die Integrale $y_{\lambda 1}$ sind offenbar wieder linear unabhängig. Wir definieren noch die Grössen

$$z_\lambda = Q(y_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots . \nu)$$

und $$z_{\lambda 1} = Q_1(y_{\lambda 1}) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots . \nu)$$

Die Grössen $z_{\lambda 1}$ bauen sich dann aus den z_λ in genau derselben Weise auf, wie die $y_{\lambda 1}$ aus den y_λ und sind linear unabhängig. Es ist ja

$$Q_1(y) = A_1 P_1(y) + Q_1(y)$$

und $$\overline{Q}_1 D\left(\frac{y}{y_1}\right) = D\,\frac{Q(y)}{z_1}, \text{ also}$$

$$z_{\lambda 1} = Q_1(y_{\lambda 1}) = Q_1(y_{\lambda 1}) = Q_1 D\begin{pmatrix} y_\lambda \\ y_1 \end{pmatrix} = D\,\frac{Q(y_\lambda)}{z_1} = D\begin{pmatrix} z_\lambda \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Auf die Differentialgleichung $P_1(y) = 0$ können wir nun genau dieselben Betrachtungen anwenden, wie auf $P(y) = 0$. D. h. wir können mit dem Integral y_{21}, das wir uns so gewählt denken, dass

(11) $$S_1(y_{21}, y_{21}) = 0$$

ausgehend von

$$Q_1(z)\,P_1(y) \pm Q_1(y)\,P_1(z) = D\,S_1(y, z)$$

$P_1(y)$ wieder um 2 Einheiten in der Ordnung reduzieren

(12) $$P_1(y) = \frac{1}{Q_1(y_{21})}\,D\,S_1(y, y_{21}) = \frac{1}{z_{21}}\,D\,P_2\,D\begin{pmatrix} y \\ y_{21} \end{pmatrix}$$

Sollen die Grössen $y_{\lambda 1}$ $(\nu - 2)$ Integrale

$$y_{\lambda 2} = D\left(\frac{y_{\lambda 1}}{y_{21}}\right) \qquad (\lambda = 3, 4 \ldots . \nu)$$

von $P_2(y) = 0$ liefern, so müssen sie nach (12) noch die Bedingungen

(11′) $$S_1(y_{\lambda 1}, y_{21}) = 0 \qquad (\lambda = 3, 4, \ldots . \nu)$$

erfüllen. Die Gleichung (9) bezieht, wenn man darin

$$y = y_\lambda, \; z = y_\mu \qquad (\lambda, \mu = 2, 3, \ldots \nu)$$

einträgt, jede Konstante $S_1(y_{\lambda 1}, y_{\mu 1})$ auf die Konstanten $S(y_\lambda, y_\mu)$, indem

$$S_1(y_{\lambda 1}, y_{\mu 1}) = - S(y_\lambda, y_\mu).$$

Die Bedingungen (11) und (11′) lauten also auch

$$S(y_\lambda, y_2) = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots . \nu)$$

Von $P_2(y) = 0$ lässt sich wieder ein symmetrischer (alternierender Multiplikator $Q_2(y)$ angeben. Zur Abkürzung setzen wir

$$z_{\lambda 2} = Q_2(y_{\lambda 2}).$$

Dann sind in gleicher Weise wie vorher

$$z_{\lambda 2} = D\left(\frac{z_{\lambda 1}}{z_{21}}\right) \qquad (\lambda = 3, 4, \ldots . \nu)$$

und es wird

$$P_2(y) = \frac{1}{z_{32}} D \, P_3 \, D \begin{pmatrix} y \\ y_{32} \end{pmatrix},$$

falls man die $y_{\lambda 2}$ den Bedingungen

$$S_2(y_{\lambda 2}, y_{32}) = 0 \qquad (\lambda = 3, 4 \ldots . \nu)$$

oder $$S_1(y_{\lambda 1}, y_{31}) = 0 \qquad \text{do.}$$

oder $$S(y_\lambda, y_3) \quad = 0 \qquad (\lambda = 3, 4 \ldots . \nu)$$

unterwirft.

Indem wir so weiterfahren, erkennen wir:

Um die Differentialgleichung 2ν. *oder* $(2\nu + 1)$. *Ordnung* $P(y) = 0$, *von der man den Multiplikator* $Q(y)$ *kennt, in lineare Differentialausdrücke 1. Ordnung zu zerlegen, sind notwendig und hinreichend* ν *linear unabhängige Integrale*

$$y_1, \; y_2 \ldots . \, y_\nu,$$

welche den Bedingungen

$$S(y_\lambda, y_\mu) = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots \nu)$$

genügen, und der zerlegte Differentialausdruck lautet

$$(14)\quad P(y) = \frac{1}{z_1} D \frac{1}{z_{21}} D \dots \frac{1}{z_{\nu,\nu-1}} D\, b\, a\, D$$

$$\frac{1}{y_{\nu,\nu-1}} D \dots \frac{1}{y_{21}} D \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}$$

resp.

$$(14')\quad P(y) = \frac{1}{z_1} D \frac{1}{z_{21}} D \dots \frac{1}{z_{\nu,\nu-1}} D\, b\, D\, a\, D$$

$$\frac{1}{y_{\nu,\nu-1}} D \dots \frac{1}{y_{21}} D \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}$$

a und b sind hierin Funktionen von x und die $y_{\lambda\mu}$ sind definiert durch

$$y_{\lambda\mu} = D \left(\frac{y_{\lambda,\mu-1}}{y_{\mu,\mu-1}} \right) \quad \begin{pmatrix} \lambda = \mu+1, \dots, \nu \\ \mu = 1, 2, \dots, \nu \end{pmatrix}$$

und ebenso

$$z_{\lambda\mu} = D \left(\frac{z_{\lambda,\mu-1}}{z_{\mu,\mu-1}} \right)$$

Dabei ist $y_{\lambda 0}$ für y_λ und $z_{\lambda 0}$ für z_λ geschrieben worden.

Der Differentialausdruck

$$Y(y) = a\, D \frac{1}{y_{\nu,\nu-1}} D \dots \frac{1}{y_{21}} D \begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix}$$

besitzt, wie leicht einzusehen, die Integrale

$$y_1, y_2, \dots, y_\nu$$

und entsprechend

$$Z(z) = (-1)^\nu\, b\, D \frac{1}{z_{\nu,\nu-1}} D \dots \frac{1}{z_{21}} D \begin{pmatrix} z \\ z_1 \end{pmatrix}$$

die Integrale

$$z_1, z_2, \dots, z_\nu$$

Da $z_\lambda = Q(y_\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, \dots, \nu)$, so geht $Z(z) = 0$ aus $Y(y) = 0$ durch die Transformation $z = Q(y)$ hervor. (14) und (14′) lauten jetzt

$$(15)\qquad P = Z'\, Y$$

$$(15')\qquad P = Z'\, D\, Y.$$

Die *vollständige Integration* kann nun leicht folgendermassen vollzogen werden:

1. Fall. $n = 2\nu$

Es sei

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_\nu$$

dasjenige Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Y' = 0$, welches zum System

$$y_1, y_2, \ldots y_\nu$$

adjungiert ist, und ebenso

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_\nu$$

dasjenige Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Z' = 0$, welches zum System

$$z_1, z_2, \ldots z_\nu$$

adjungiert ist. Wir bestimmen nun

$$y_{\nu+i} \quad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

so, dass $Y(y_{\nu+i}) = \zeta_i$ wird.

Hieraus ergibt sich nach bekannte Weise[1]) zu den

$$y_1, y_2, \ldots y_\nu \text{ noch}$$

$$y_{\nu+i} = \sum_{k=i}^{\nu} y_k \int \zeta_i \eta_k \, dx \quad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

welche zusammen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Y(y) = 0$ bilden. Gäbe es nämlich nicht zugleich verschwindende Konstante c_i, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0,$$

so wäre auch

$$Y\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\right) = \sum_{i=\nu+1}^{n} c_i Y(y_i) = \sum_{i=1}^{\nu} c_{\nu+i} \zeta_i = 0.$$

Es wären also entweder

$$c_{\nu+i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

oder die

$$\zeta_i \quad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

[1]) Schlesinger, Handbuch Bd. I, pag. 76.

wären linear abhängig. Ersteres kann nicht der Fall sein, weil daraus folgte, dass

$$\sum_{i=1}^{\nu} c_i y_i = 0$$

mit nicht lauter verschwindenden c_i. Letzteres ist unmöglich, weil die ζ_i mit den z_i linear unabhängig sind. Die $z_i = Q(y_i)$ sind das aber, weil wir $P = 0$ als irreduzibel gesetzt haben.

2. Fall. $n = 2\nu + 1$

$$P = Z' D Y$$

Zu den Integralen $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ erhält man ν weitere $y_{\nu+i}$ $(i = 1, 2, \ldots \nu)$ wenn man $D Y(y_{\nu+i}) = \zeta_i$ setzt, woraus

$$Y(y_{\nu+i}) = \int \zeta_i \, d x (i = 1, 2, \ldots \nu).$$

Als Auflösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichungen erhält man

$$y_{\nu+i} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} y_\lambda \int \eta_\lambda \int \zeta_i \, d x \quad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

Das n. Integral erhält man aus

$$Y(y_n) = 1$$

$$y_n = \sum_{\lambda=1}^{\nu} y_\lambda \int \eta_\lambda \, d x$$

Die gefundenen $2\nu + 1$ Integrale bilden wieder ein Fundamentalsystem.

§ 5. Nachweis der Existenz der geforderten Integrale.

Wir haben noch die Existenz von ν Integralen nachzuweisen, die paarweise (inklusive den Kombinationen mit sich selbst) den Bilinearausdruck $S(y, z)$ annullieren.

Es seien 2ν linear unabhängige Integrale

$$y_1, y_2, \ldots y_{2\nu}$$

der Differentialgleichung $P(y) = 0$ gegeben. Aus ihnen bilden wir mit den Konstanten s_i und t die Integrale

$$u = \sum_{i=1}^{2\nu} s_i \eta_i \text{ und } v_i = \sum_{i=1}^{2\nu} t_i \eta_i.$$

Aus der Definitionsgleichung der Multiplikatoren folgt, dass

$$S(\eta_i, \eta_k) = c_{ik} = \text{const.}$$

Setzt man nun die Integrale u und v in $S(y, z)$ ein, so erhält man

$$S(u, v) = S\left\{\sum_{i=1}^{2\nu} s_i \eta_i, \sum_{i=1}^{2\nu} t_i \eta_i\right\} = \sum_{i=1}^{2\nu}\sum_{k=1}^{2\nu} c_{ik} s_i t_k.$$

Unsere Aufgabe ist also gelöst, *wenn wir ν linear unabhängige Konstantenreihen*

$$x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)}, \ldots\ldots x_{2\nu}^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots\ldots \nu)$$

angeben können, welche paarweise die symmetrische (alternierende) Bilinearform

$$S(x, y) = \sum_{i,k=1}^{2\nu} c_{ik} x_i y_k$$

zum Verschwinden bringen.

Wir behandeln — als einfacher — zuerst den Fall der

Alternierenden Form [1])

$S(x\,y)$ kann bloss einen geraden Rang $\varsigma = 2\mu$ haben. Sie lässt sich auf die Gestalt reduzieren

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{X_i Y_i' - X_i' Y_i\right\}.$$

Hierin sind

$$X_1, X_2, \ldots\ldots X_\mu;\ X'_1, X'_2, \ldots\ldots X'_\mu$$

ς linear unabhängige Linearformen der 2ν Variabeln $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{2\nu}$ und die Y_i dieselben Linearformen geschrieben in den y_i. Bestimmt man also die Grössen

$$x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)} \ldots\ldots x_{2\nu}^{(\lambda)}$$

so, dass sie den Gleichungen

$$X_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots \mu)$$

[1]) Vgl. Frobenius a. a. O. pag. 187.

genügen, so erfüllen sie die gegebene Bedingung. Diese Gleichungen haben aber

$$2\,\nu - \mu = \nu + (\nu - \mu) \geqq \nu$$

linear unabhängige Lösungssysteme. Man hätte die gesuchten Wertereihen auch allgemeiner bestimmen können aus den μ Gleichungen

$$X_i' = \sum_{k=1}^{\mu} C_{ik}\, X_k \quad (i = 1, 2, \ldots . \mu)$$

wo die C_{ik} der Bedingung

$$C_{ik} - C_{ki} = 0$$

genügen, sonst aber beliebig sind. Sie genügen dann auch den gleichgebauten Gleichungen

$$Y_i' = \sum_{k=1}^{\mu} C_{ik}\, Y_k \quad (i = 1, 2, \ldots . \mu)$$

Setzt man die so bestimmten Wertereihen in $S(x, y)$ ein, so resultiert

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{\mu} \left\{ C_{ik}\, X_i\, Y_k - C_{ik}\, Y_i\, X_k \right\} =$$

$$\sum_{i,k} (C_{ik} - C_{ki})\, X_i\, Y_k = 0$$

Im Falle einer

Symmetrischen Form

kann der Rang ς gerade oder ungerade sein. Es sei $\varsigma = 2\,\mu$. Dann kann man auf folgende Weise reduzieren

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{1}{2} \left\{ U_i\, V_i - U_i'\, V_i' \right\}.$$

Hierin sind

$$U_1, U_2, \ldots . U_\mu;\ U_1', U_2', \ldots . U_\mu'$$

ς linear unabhängige Linearformen der x_i und

$$V_1, V_2, \ldots . V_\mu;\ V_1', V_2', \ldots , . V_\mu'$$

dieselben Linearformen geschrieben in den y_i. Setzt man nun

$$U_i = X_i + X_i',\ U_i' = X_i - X_i'$$

und entsprechend

$$V_i = Y_i + Y_i', \quad V_i' = Y_i - Y_i',$$

so sind

$$X_1, X_2, \ldots . X_\mu; \; X_1', X_2', \ldots . X_\mu'$$

wieder $2\,\mu$ linear unabhängige Linearformen der x_i und

$$Y_1, Y_2, \ldots . Y_\mu; \; Y_1', Y_2', \ldots . Y_\mu'$$

dieselben Linearformen geschrieben in den y_i. $S(x, y)$ lautet nun

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ X_i\, Y_i' + X_i'\, Y_i \right\}$$

Wie vorher bestimmt man jetzt die gesuchten Wertereihen aus den μ Gleichungen

$$X_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots . \mu)$$

oder allgemeiner aus

$$X_i' = \sum_{k=1}^{\mu} C_{ik}\, X_k \quad (i = 1, 2 \ldots . \mu)$$

wo $$C_{ik} + C_{ki} = 0.$$

Diese μ Gleichungen haben sicher

$$2\,\nu - \mu = \nu + (\nu - \mu) \geqq \nu$$

linear unabhängige Lösungssysteme.

Ist $\varsigma = 2\,\mu + 1$, wo also $2\,\mu + 1 < 2\,\nu$, so reduziert man auf die Form

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ X_i\, Y_i' + X_i'\, Y_i \right\} + X_\varsigma\, Y_\varsigma.$$

Die gesuchten Wertereihen sind zu bestimmen aus

$$X_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots . \mu, \varsigma)$$

oder allgemeiner aus

$$X_i' = \sum_{k=1}^{\mu} C_{ik}\, X_k \quad (i = 1, 2, \ldots . \mu)$$

$$X_\varsigma = 0$$

wo $$C_{ik} + C_{ki} = 0.$$

Die Zahl der linear unabhängigen Wertesysteme ist mindestens

$$2\,\nu - (\mu + 1) = \nu + \nu - (\mu + 1) \geqq \nu.$$

Es ist ja $2\nu > 2\mu + 1$ und

$$\nu \geqq \mu + 1.$$

Die Aufgabe dieses Paragraphen liesse sich auch lösen unter Vermeidung der kanonischen Darstellung der Bilinearform, indem man die Wertereihen der $x_i^{(\lambda)}$ sukzessive ermittelt, wie dies von *Frobenius* a. a. O. für den Fall einer alternierenden Form durchgeführt wurde. Bei einer symmetrischen Bilinearform ist diese Durchführung etwas schwieriger.

II. Abschnitt.

Das Multiplikatorensystem eines Systems von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

In diesem Abschnitt wird versucht, unter Anwendung ähnlicher Methoden wie im I. Abschnitt, die Definitionen und Resultate auf lineare Differentialsysteme auszudehnen. Die linearen Differentialgleichungen n. Ordnung können ja bekanntlich als ganz spezielle Fälle linearer Differentialsysteme angesehen werden. Näheres darüber, wie überhaupt für das Rechnen mit Differentialsystemen findet man bei *L. Schlesinger*, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen.

§ 6. Definition und Darstellung des Multiplikatorensystems.

Wir schicken einige kurze Bemerkungen über Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, oder wie wir sie im folgenden stets bezeichnen werden, lineare Differentialsysteme, voraus.

Zu jedem linearen homogenen Differentialsystem

$$(1) \qquad \frac{d\,y_\varkappa}{d\,x} - \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\, a_{\lambda\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

oder, wie wir es abkürzend bezeichnen wollen,

$$P_\varkappa\,(y) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

gehört ein *„adjungiertes Differentialsystem“*

$$(2) \qquad \frac{d\,y_\varkappa}{d\,x} + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\, a_{\varkappa\lambda} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

oder $$P_\varkappa'(y) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n).$$

Beide sind verbunden durch die „*Lagrange'sche Identität*"

$$(3) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \left\{ z_\varkappa\, P_\varkappa(y) + y_\varkappa\, P_\varkappa'(z) \right\} = \frac{d}{d\,x} P(y, z).$$

Hierin sind die $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ als unbestimmte Variable aufzufassen und

$$P(y, z) = \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa\, z_\varkappa.$$

Setzt man in (3) ein Lösungssystem

$$z_{i1}, z_{i2}, \ldots\ldots z_{in}$$

des adjungierten Differentialsystems für die $z_\varkappa$ ein, so wird

$$(4) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa} \left\{ \frac{d\,y_\varkappa}{d\,x} - \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\lambda\, a_{\lambda\varkappa} \right\} = \frac{d}{d\,x} \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa\, z_{i\varkappa}$$

oder mit den Abkürzungen

$$(4') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa}\, P_\varkappa(y) = \frac{d}{d\,x} P(y, z_i).$$

Jedes Lösungssystem des adjungierten Systems ist also ein System von Multiplikatoren; und umgekehrt genügt ein jedes solches System dem adjungierten Differentialsystem. Kennt man n Lösungssysteme von (1)

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots\ldots y_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

deren Determinante

$$|\,y_{i\varkappa}\,| \quad i, \varkappa = 1, 2, \ldots n$$

nicht verschwindet, oder wie wir sagen, ein *Integralmatrix* $(y_{i\varkappa})$, so hat man in

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{\varkappa i})^{-1}$$

eine Integralmatrix des adjungierten Systems und zwar die „*adjungierte Matrix*" zu $(y_{i\varkappa})$. Die Elemente beider Matrixes verbinden n^2 Relationen

$$(5) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} z_{\varkappa\lambda} = \delta_{i\varkappa} \text{ oder } P(y_i, z_\varkappa) = \delta_{i\varkappa}$$

Es sei nun wieder

$$(1) \qquad \frac{d\, y_\varkappa}{d\, x} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots . n)$$

ein Differentialsystem mit beliebigen Koeffizienten. Wir nennen das System der Linearformen

$$Q_\varkappa(y) \equiv \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots . n)$$

ein *symmetrisches (alternierendes) Multiplikatorensystem*, wenn die folgende Indentität in den Grössen y_λ, z_λ besteht

$$(6) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \left\{ Q_\varkappa(z) P_\varkappa(y) \pm Q_\varkappa(y) P_\varkappa(z) \right\} = \frac{d}{d\,x} S(y, z)$$

$S(y, z)$ ist eine bilineare Form,

$$S(y, z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} s_{i\varkappa} y_i z_\varkappa,$$

der das Multiplikatorensystem *begleitende Bilinearausdruck*. Bei einem symmetrischen Multiplikatorensystem ist er symmetrisch

$$S(y, z) \quad S(z, y),$$

bei einem alternierenden Multiplikatorensystem alternierend

$$S(y, z) \quad -S(z, y).$$

Wir wollen nun den Bilinearausdruck durch die Elemente $(z_{i\varkappa})$ von (2) ausdrücken und dadurch eine *Darstellung für das Multiplikatorensystem* gewinnen.

Bei einem symmetrischen Multiplikatorensystem ist

$$S(y, y) = \text{const.}$$

eine quadratische Integralgleichung. Wir stellen daher zweckmässig den Bilinearausdruck $S(y, z)$ durch die Linearformen $P(y, z_i)$, welche linearen Integralgleichungen

$$P(y, z_i) = \text{const.} \quad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

angehören, dar. Diese Linearformen sind linear unabhängig.

Bestände nämlich eine Relation

$$\sum_{i=1}^{n} \varsigma_i(x)\, P(y, z_i) = 0,$$

so wäre, wenn man hierin $y = y_\varkappa$ setzt, zufolge (5)

$$\varsigma_\varkappa(x) = 0.$$

Es ist also die Darstellung möglich

$$(7) \qquad S(y, z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa}\, P(y, z_i)\, P(z, z_\varkappa)$$

Wenn man hierin für die y_λ und z_λ zwei Zeilen

$$y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \ldots\ldots y_{\lambda n} \qquad \text{und}$$
$$y_{\mu 1}, y_{\mu 2}, \ldots\ldots y_{n\mu}$$

der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ setzt, welche zu $(z_{i\varkappa})$ adjungiert ist, so erhält man, da

$$P(y_\lambda, z_i) = \delta_{\lambda i} \qquad \text{und}$$
$$P(y_\mu, z_\varkappa) = \delta_{\mu\varkappa}$$
$$S(y_\lambda, y_\mu) = c_{\lambda\mu}.$$

Aus der Definitionsgleichung (6) geht aber hervor, dass

$$S(y_\lambda, y_\mu) = c_{\lambda\mu} = \text{const.}$$

Ist das Multiplikatorensystem ein symmetrisches, so ist

$$c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda},$$

ist es alternierend, so ist

$$c_{\lambda\mu} = -c_{\mu\lambda}.$$

Differentiert man (7), so erhält man unter Berücksichtigung von

$$(4') \qquad \sum_{i=1}^{n} z_{i\lambda}\, P_\lambda(y) = \frac{d}{dx} P(y, z_i)$$

und Vergleichung mit (6) als Ausdruck des symmetrischen (alternierenden) Multiplikatorensystems

$$(8) \qquad Q_\lambda(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa}\, z_{i\lambda}\, P(y, z_\varkappa) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Hierin sind die $c_{i\varkappa} = \pm c_{\varkappa i}$ beliebige Konstante. Setzt man aber für ein beliebiges, aber bestimmtes i und $\varkappa$ $c_{i\varkappa} = c_{\varkappa i} = 1$

und die übrigen Konstanten gleich Null, so erhält man das spezielle symmetrische Multiplikatorensystem

$$z_{i\lambda} P(y, z_\varkappa) + z_{\lambda\varkappa} P(y, z_i) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Setzt man $i, \varkappa = 1, 2, \ldots n$, so erhält man

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

symmetrische Multiplikatorensysteme. *Die aus diesen Systemen gebildete Schaar gibt das allgemeinste symmetrische Multiplikatorensystem. Ebenso setzt sich das allgemeinste alternierende Multiplikatorensystem aus den*

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Systemen

$$z_{i\lambda} P(y, z_\varkappa) - z_{\varkappa\lambda} P(y, z_i) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

zusammen. — Geht man von einer Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ zu einer andern von $P_\varkappa'(z) = 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots . n)$ über, so werden die Variabeln

$$z_{1\lambda}, z_{2\lambda}, \ldots . z_{n\lambda}$$

und $$P(u, z_1), P(u, z_2), \ldots . P(u, z_n)$$

der Bilinearform (8) kogredient transformiert. Durch geeignete Wahl der transformierenden Substitution kann also ein symmetrisches Multiplikatorensystem auf die *kanonische* Gestalt

$$(9) \qquad Q_\lambda(y) = \sum_{i=1}^{s} z_{i\lambda} P(y, z_i) \quad (\lambda = 1, 2 \ldots . n)$$

und ein alternierendes System auf die Gestalt

$$(10) \qquad Q_\lambda(y) = \sum_{i=1}^{s} \left\{ z_{2i-1,\lambda} P(y, z_{2i}) - z_{2i,\lambda} P(y, z_{2i-1}) \right\}$$

gebracht werden. s ist hierin der Rang, resp. der halbe Rang, der symmetrischen (alternierenden) Matrix $(c_{i\varkappa})$.

Nimmt man speziell an, die Koeffizienten des Systems $P_\varkappa(y) = 0$ und des Multiplikatorensystems $Q_\varkappa(y)$ gehören demselben Rationalitätsbereiche an, dann ist

$$|c_{i_\varkappa}| = = 0,$$

falls das System $P_\varkappa(y) = 0$ *irreduzibel* ist. Ist nämlich $c_{i_\varkappa}| = 0$, so ist $\varsigma < n$ resp. $2\varsigma < n$ und es wird in (9) und (10)

$$Q_\lambda(y_n) = 0.$$

Es bestände also zwischen den Elementen des Lösungssystems $y_{n1}, y_{n2}, \ldots . y_{nn}$ eine lineare homogene Relation mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches, was Irreduzibilität nach sich zöge.[1])

Zu jedem Multiplikatorensystem gehört eine Matrix $(r_{i_\varkappa})$, welche aus seinen Koeffizienten gebildet ist; wir nennen sie „*Multiplikatorenmatrix*". Sie ergibt sich auf folgende Weise: Einerseits ist

$$Q_\lambda(y) = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu r_{\mu\lambda},$$

anderseits ist

$$Q_\lambda(y) = \sum_{i,\varkappa=1}^{n} c_{i_\varkappa} z_{i\lambda} P(y, z_\varkappa) = \sum_{i,\varkappa=1}^{n} c_{i_\varkappa} z_{i_\varkappa} \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu z_{\varkappa\mu} =$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \sum_{i,\varkappa=1}^{n} c_{i_\varkappa} z_{i\lambda} z_{\varkappa\mu},$$

woraus durch Vergleichung

$$r_{\mu\lambda} = \sum_{i,\varkappa=1}^{n} c_{i_\varkappa} z_{i\lambda} z_{\varkappa\mu} \quad \text{oder}$$

$$(11) \qquad (r_{i_\varkappa}) = (z_{\varkappa i})\,(c_{\varkappa i})\,(z_{i_\varkappa}).$$

Da bei einem symmetrischen Multiplikatorensystem $(c_{\varkappa i}) = (c_{i_\varkappa})$, so ist die *Multiplikatorenmatrix symmetrisch* und da bei einem alternierenden Multiplikatorensystem $(c_{\varkappa i}) = -(c_{i_\varkappa})$, so ist die zugehörende Multiplikatorenmatrix *alternierend*. — Im Bilinearausdruck

$$S(y, z) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} s_{\lambda\mu} y_\lambda z_\mu$$

[1]) Schlesinger, Vorlesungen pag. 114.

tritt auch eine Koeffizientenmatrix auf, $(s_{i\varkappa})$

$$S(y,z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} P(y,z_i) P(z,z_\varkappa), \text{ wo}$$

$$P(y,z_i) = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda z_{i\lambda} \text{ und } P(z,z_\varkappa) = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda z_{\varkappa\lambda}$$

Es ist also

$$s_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} z_{i\lambda} z_{\varkappa\mu} = r_{\mu\lambda}$$

$$(s_{i\varkappa}) = (r_{\varkappa i}).$$

Ist ein lineares homogenes Differentialsystem gegeben, so lässt sich für die Elemente der symmetrischen (alternierenden) Multiplikatorenmatrix ein Differentialsystem von der Ordnung

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ resp. } \frac{n(n-1)}{2}$$

$$-\frac{d\,r_{i\varkappa}}{d\,x} = \sum_{\lambda=1}^{n} r_{i\lambda} a_{\varkappa\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} r_{\lambda\varkappa} \quad (i,\varkappa = 1,2\ldots n)$$

$$r_{i\varkappa} = \pm r_{\varkappa i}$$

aufstellen. Dieses entspricht dem auf pag. 23 angegebenen, lässt sich aber einfacher ableiten.

Setzt man voraus, dass die Koeffizienten des gegebenen Differentialsystems einem gewissen Bereiche angehören, so lässt sich bei Irreduzibilität des Systems in diesem Bereiche ganz analog wie auf pag. 14 nachweisen, *dass nicht zwei Multiplikatorenmatrizes existieren können, deren Elemente diesem Bereiche angehören.*

Zum Schlusse soll noch hingewiesen werden auf den *Zusammenhang mit den Differentialsystemen, die mit dem adjungierten Differentialsystem zu derselben Art gehören.*

Die Koeffizienten des irreduziblen linearen Differentialsystems

$$(1) \qquad \frac{d\,y_\varkappa}{d\,x} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1,2\ldots n)$$

sollen wieder einem bestimmten Rationalitätsbereiche angehören und ebenso die Koeffizienten eines symmetrischen (alternierenden) Multiplikatorensystems

$$Q_\varkappa(y) = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \varsigma_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

von (1). Setzt man nun in (6) für

$$y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$$

irgend ein Lösungssystem

$$\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots \eta_n$$

ein, so erhält man

$$\pm \sum_{\lambda=1}^{n} Q_\varkappa(\eta) P_\varkappa(z) \frac{d}{dx} S(\eta, z),$$

d. h. die

$$\zeta_\varkappa = Q_\varkappa(\eta) = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \varsigma_{\varkappa\lambda}$$

sind ein Lösungssystem des zu (1) adjungierten Differentialsystems

$$(2) \qquad \frac{d z_n}{d x} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda a_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots\ldots n).$$

Anders ausgedrückt: (1) und (2) gehören zu derselben Art.

Es werde jetzt umgekehrt angenommen, (1) gehöre mit (2) zu derselben Art und zwar so, dass $(\varsigma_{i\varkappa})$ entweder eine symmetrische oder eine alternierende Matrix bedeutet.

$$(12) \qquad z_n = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \varsigma_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

$$\varsigma_{i\varkappa} \mp \varsigma_{\varkappa i} = 0$$

$(\eta_{i\varkappa})$ sei eine beliebige Integralmatrix von (1), dann ergibt sich nach (12) in

$$(13) \qquad (z_{i\varkappa}) = (\eta_{i\varkappa})(\varsigma_{i\varkappa})$$

eine Integralmatrix von (2). Wenn aber $(y_{i\varkappa})$ die zu $(z_{i\varkappa})$ adjungierte Matrix bedeutet, so ist

$$(y_{i\varkappa}) = (c_{\varkappa i})(\eta_{i\varkappa}), \text{ wo}$$

$(c_{i\varkappa})$ eine Konstante. Folglich aus (13)

$$(c_{\varkappa i})\,(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})\,(\varsigma_{i\varkappa}) \text{ oder}$$

$$(\varsigma_{i\varkappa}) = (z_{\varkappa i})\,(c_{\varkappa i})\,(z_{i\varkappa}). \tag{14}$$

Da $(\varsigma_{i\varkappa}) = \pm\,(\varsigma_{\varkappa i})$, so ist auch $(c_{\varkappa i}) = \pm\,(c_{i\varkappa})$. Vergleicht man (14) mit (11), so sieht man, dass es eine Multiplikatorenmatrix $(r_{i\varkappa})$ gibt, deren Elemente dem Rationalitätsbereich angehören, nämlich

$$(r_{i\varkappa}) = (\varsigma_{i\varkappa}).$$

§ 7. Die Gesamtheit der Differentialsysteme mit gegebenem Multiplikatorensystem.

Das Differentialsystem

$$\frac{d\,y_\varkappa}{d\,x} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\, a_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

habe die symmetrische (alternierende) Multiplikatorenmatrix $(r_{i\varkappa})$. Dann ist

$$(y_{i\varkappa})^{-1}\,(c_{\varkappa i})\,(y_{\varkappa i})^{-1} = (r_{i\varkappa}),$$

wo $(y_{i\varkappa})$ eine beliebige Integralmatrix von (1) und $(c_{i\varkappa}) = \pm\,(c_{i\varkappa}) = \text{const}$. Von (1) gehe man jetzt durch die lineare Transformation

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\, \varsigma_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

wo die $\varsigma_{\lambda\varkappa}$ noch näher zu bestimmen sind, über zu dem Differentialsystem

$$\frac{d\,z_\varkappa}{d\,x} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda\, b_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

In

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})\,(\varsigma_{i\varkappa})$$

hat man dann eine Integralmatrix von (2), falls die $\varsigma_{i\varkappa}$ so gewählt worden sind, dass $\varsigma_{i\varkappa}' = 0$. Eine Multiplikatorenmatrix gewinnt man in

(3) $$(m_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})^{-1}\,(c_{\varkappa i})\,(z_{i\varkappa})^{-1} =$$
$$(\varsigma_{i\varkappa})^{-1}\,(y_{i\varkappa})^{-1}\,(c_{\varkappa i})\,(y_{\varkappa i})^{-1}\,(\varsigma_{\varkappa i})^{-1} \text{ oder}$$

(3′) $$\underline{(m_{i\varkappa}) = (\varsigma_{i\varkappa})^{-1}\,(r_{i\varkappa})\,(\varsigma_{\varkappa i})^{-1}.}$$

Es sei wieder $|\,r_{i\varkappa}\,| \neq 0$. Da $(r_{i\varkappa}) = \pm\,(r_{\varkappa i})$, so können wir die $\varsigma_{i\varkappa}$ so wählen, dass

$$(m_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp.}$$
$$(m_{i\varkappa}) = (\varepsilon_{i\varkappa})$$

wird. Dabei bedeuten

$$(\delta_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } (\varepsilon_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Welchen Bedingungen haben die Koeffizienten eines Differentialsystems (2) zu genügen, damit es die Multiplikatorenmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ resp. $(\varepsilon_{i\varkappa})$ hat?

Dann muss, wenn wir die genannten constanten Matrixes mit $(\mathfrak{S}_{i\varkappa})$ bezeichnen

$$(\mathfrak{S}_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})^{-1}\,(c_{\varkappa i})\,(z_{\varkappa i})^{-1}$$

sein, woraus

$$(z_{i\varkappa})\,(\mathfrak{S}_{i\varkappa}) = (c_{\varkappa i})\,(z_{\varkappa i})^{-1}$$

d. h. $(z_{i\varkappa})\,(\mathfrak{S}_{i\varkappa})$ ist eine Integralmatrix des zu (2) adjungierten Differentialsystems

(2′) $$\frac{dz_\varkappa}{dx} = -\sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda\, b_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n).$$

Setzt man ihre n Lösungssysteme in (2′) ein, so wird

$$\left(\frac{d\,z_{i\varkappa}}{d\,x}\right)(\mathfrak{S}_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})\,(\mathfrak{S}_{i\varkappa})\,(-b_{\varkappa i}) \text{ oder}$$

$$(\mathfrak{S}_{i\varkappa})\,(-b_{\varkappa i}) = (z_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{d\,z_{i\varkappa}}{d\,x}\right)(\mathfrak{S}_{i\varkappa}).$$

Benützt man aber

$$\left(\frac{d\,z_{i\varkappa}}{d\,x}\right) = (z_{i\varkappa})\,(b_{i\varkappa}), \text{ so wird } (\mathfrak{S}_{i\varkappa})\,(-b_{\varkappa i}) = (b_{i\varkappa})\,(\mathfrak{S}_{i\varkappa}).$$

Hat man also ein Differentialsystem (1) mit einem symmetrischen Multiplikatorensystem, so lässt es sich durch eine lineare Transformation überführen in ein System (2), in welchem

$$(-b_{\varkappa i}) = (b_{i\varkappa}).$$

Solche Differentialsysteme nennen wir *negativ autoadjungiert.* Eines ihrer Multiplikatorensysteme lautet

$$y_1, y_2, \ldots y_n.$$

Existiert ein alternierendes Multiplikatorensystem von (1), so lässt es sich überführen in ein Differentialsystem (2), bei dem

$$(\varepsilon_{i\varkappa})\,(-b_{\varkappa i}) = (b_{i\varkappa})\,(\varepsilon_{i\varkappa}).$$

Wir nennen solche Differentialsysteme *positiv autoadjungiert.* Eines ihrer Multiplikatorensysteme lautet

$$y_2, -y_1, y_4, -y_3, \ldots y_n, -y_{n-1}$$

Es sei jetzt umgekehrt

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda\, b_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

ein negativ (positiv) autoadjungiertes Differentialsystem, d. h. es habe die symmetrische (alternierende) Multiplikatorenmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ resp. $(\varepsilon_{i\varkappa})$. Wir behaupten:

Durch die Transformation

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda\, \sigma_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n), \tag{5}$$

wo $(\sigma_{i\varkappa})$ so gewählt ist, dass

$$(\sigma_{i\varkappa})\,(r_{i\varkappa})\,(\sigma_{\varkappa i}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp. } (\varepsilon_{i\varkappa}) \tag{6}$$

geht (4) über in ein Differentialsystem

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}\, y_\lambda \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n.) \tag{7}$$

welches die symmetrische (alternierende) Multiplikatorenmatrix $(r_{i\varkappa})$ besitzt. In der Tat: Ist $(z_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix von (4), so ist zufolge (5)

$$(y_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})\,(\sigma_{i\varkappa})$$

eine solche von (7). Nach (6) kann ja $\sigma_{i\nu}$ nicht verschwinden, wenn $r_{i\varkappa} \neq 0$. Ferner ist entsprechend pag. 42 Gleichung (11)

$$(z_{i\varkappa})^{-1}\,(c_{i\varkappa})\,(z_{\varkappa i})^{-1} = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp. } (\varepsilon_{i\varkappa}). \tag{8}$$

Multipliziert man (6) beidseitig mit $(z_{i\varkappa})$ und $(z_{\varkappa i})$, so wird

$$(y_{i\varkappa})\,(r_{i\varkappa})\,(y_{\varkappa i}) = (z_{i\varkappa})\,(\delta_{i\varkappa})\,(z_{\varkappa i}) \text{ resp. } (z_{i\varkappa})\,(\varepsilon_{i\varkappa})\,(z_{\varkappa i})$$

Die rechte Seite ist aber nach (8) gleich $(c_{i\varkappa})$. Also

$$(y_{i\varkappa})^{-1}(c_{i\varkappa})(y_{\varkappa i}) = (r_{i\varkappa})$$

in Übereinstimmung mit unserer Behauptung. Die Gesamtheit der Differentialsysteme, welche eine gegebene symmetrische (alternierende) Multiplikatorenmatrix besitzen, wird also erzeugt, indem man sämtliche negativ (positiv) autoadjungierten Differentialsysteme linear transformiert mit allen $(\varsigma_{i\varkappa})$, für welche

(9) $$(\varsigma_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})(\varsigma_{\varkappa i}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp. } (\varepsilon_{i\varkappa}).$$

Dabei wird aber das einzelne Differentialsystem *mehrmals* erhalten, wie aus folgendem hervorgeht.

Welches sind alle Substitionen, welche die Matrizesgleichung (9) erfüllen? Es sei $(t_{i\varkappa})$ *eine* Lösung von (9), also

$$(t_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})(t_{\varkappa i}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp. } (\varepsilon_{i\varkappa}).$$

Wir setzen nun

(10) $$(\varsigma_{i\varkappa}) = (\tau_{i\varkappa})(t_{i\varkappa}).$$

Die allgemeinste Lösung findet man dann, wenn man die allgemeinsten $(\tau_{i\varkappa})$ bestimmt, für welche

$$(\tau_{i\varkappa})(t_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})(t_{\varkappa i})(\tau_{\varkappa i}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp. } (\varepsilon_{i\varkappa})$$

oder

(11) $$(\tau_{i\varkappa})(\delta_{i\varkappa})(\tau_{\varkappa i}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp.}$$

(11′) $$(\tau_{i\varkappa})(\varepsilon_{i\varkappa})(\tau_{\varkappa i}) = (\varepsilon_{i\varkappa}).$$

Gleichung (10) lässt sich dahin interpretieren, dass wir das autoadjungierte System zuerst vermittelst $(\tau_{i\varkappa})$ und dann das erhaltene System vermittelst $(t_{i\varkappa})$ transformieren. Nach der Anweisung auf pag. 46 kommt man bei der ersten Transformation auf ein Differentialsystem, das die Multiplikatorenmatrix

$$(\tau_{i\varkappa})^{-1}(\delta_{i\varkappa})(\tau_{\varkappa i})^{-1} \text{ resp.}$$
$$(\tau_{i\varkappa})^{-1}(\varepsilon_{i\varkappa})(\tau_{\varkappa i})^{-1}$$

hat, je nachdem das Ausgangssystem ein negativ oder positiv autoadjungiertes ist. Nach (11) und (11′) sind diese Matrixes aber identisch mit

$$(\delta_{i\varkappa}) \text{ resp. } (\varepsilon_{i\varkappa}).$$

Die erste Transformation führt also wieder in ein negativ resp. positiv autoadjungiertes Differentialsystem über. Daher:

Man erhält die Gesamtheit der Differentialsysteme, welche das symmetrische (alternierende) Multiplikatorensystem

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots n)$$

besitzen, indem man die Gesamtheit der negativ resp. positiv autoadjungierten Differentialsysteme transformiert vermittelst der Substitution $(t_{i\varkappa})$, *welche eine beliebige aber bestimmt gewählte Lösung der Matrizesgleichung*

$$(t_{i\varkappa})\,(r_{i\varkappa})\,(t_{\varkappa i}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ resp.}$$
$$(t_{i\varkappa})\,(r_{i\varkappa})\,(t_{\varkappa i}) = (\varepsilon_{i\varkappa})$$

ist.

§ 8. Integration der Differentialsysteme mit gegebenem linearen Multiplikatorensystem.

Das Differentialsystem

$$\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots n) \tag{1}$$

das im Rationalitätsbereiche R als irreduzibel vorausgesetzt wird, besitze ein symmetrisches (alternierendes) Multiplikatorensystem

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots n). \tag{2}$$

Von (1) kenne man die $(n-m)$ linear unabhängigen Lösungssysteme

$$\eta_{\varkappa\lambda}\begin{pmatrix}\varkappa = m+1, m+2, \dots n\\ \lambda = 1, 2, \dots\dots\dots\dots n\end{pmatrix}$$

Durch die Transformation

$$\begin{cases} z_\varkappa = y_\varkappa & (\varkappa = 1, 2, \dots m) \\ z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} r_{\mu\lambda}\, r_{i\varkappa\mu}\, y_\lambda & (\varkappa = m+1, \dots n) \end{cases} \tag{3}$$

oder (pag. 43)

$$\begin{cases} z_\varkappa = y_\varkappa & (\varkappa = 1, 2, \dots\dots m) \\ z_\varkappa = S(y, \eta_\varkappa) & (\varkappa = m+1, \dots n) \end{cases} \tag{3'}$$

komme man von dem Differentialsystem (1) zu

$$\frac{d z_\varkappa}{d x} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

Jeder Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ entspricht vermittelst (3) eine Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ von (4), indem die Determinante der Transformation (3) von Null verschieden ist. Ihr Wert ist ja

$$\left| \sum_{\mu=1}^{n} r_{\mu\lambda}\, \eta_{\varkappa\mu} \right| \quad (\lambda, \varkappa = m+1, \ldots . n) \tag{5}$$

Wie wir schon früher zeigten (pag. 44), erhält man aus (2) ein Lösungssystem des zu (1) adjungierten Differentialsystems

$$\frac{d u_\varkappa}{d z} = -\sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda a_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) \tag{1'}$$

wenn man für die y_λ ein Lösungssystem von (1) einsetzt. Die Determinante (5) kann also auch geschrieben werden

$$u_{\varkappa\lambda} \quad (\lambda, \varkappa = m+1, \ldots n)$$

Die $(n-m)$ Lösungssysteme

$$u_{\varkappa\lambda} \quad \begin{pmatrix} \varkappa = m+1, \ldots n \\ \lambda = 1, 2, \ldots . n \end{pmatrix}$$

sind aber linear unabhängig, da sonst (1) reduzibel wäre. Eine der Determinanten

$$\left| u_{\varkappa\lambda} \right| \begin{matrix} \varkappa = m+1, \ldots n \\ \lambda = (n-m) \text{ Zahlen aus } 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

ist daher sicher von Null verschieden. Durch eine Indexänderung lässt sich immer erreichen, dass dies (5) ist.

Welche Gestalt hat nun das Differentialsystem (4)? Aufschluss über die Matrix $(b_{i\varkappa})$ gibt uns die Existenz eines symmetrischen (alternierenden) Multiplikatorensystems. Denken wir uns die $(n-m)$ gegebenen Lösungssysteme von (1) zu einer Integralmatrix $(\eta_{i\varkappa})$ ergänzt, dann hat man vermittelst (2) in

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{n} \eta_{i\lambda}\, r_{\lambda\varkappa} \right) = (\eta_{i\varkappa})\,(r_{i\varkappa}) \quad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

eine Integralmatrix von (1'). Es ist also

$$(\eta_{i\varkappa})\,(r_{\iota\varkappa}) = (c_{i\varkappa})\,(\eta_{\varkappa i})^{-1} \quad (c_{i\varkappa} = \text{const.})$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$(\zeta_{i\varkappa}) = (\eta_{\varkappa i})^{-1} \text{ und } (t_{i\varkappa}) = (r_{\varkappa i})^{-1}$$

setzt,

$$(\zeta_{\varkappa})\,(t_{i\varkappa}) = (c_{\varkappa i})^{-1}\,(\eta_{i\varkappa}).$$

Es ist also auch $(\omega_{i\varkappa}) = (\zeta_{i\varkappa})\,(t_{i\varkappa})$

eine Integralmatrix von (1'). Vermittelst (3) hat man dann in

$$(6)\quad \begin{cases} z_{i\varkappa} = \omega_{i\varkappa} & (\varkappa = 1, 2, \ldots m) \\ z_{i\varkappa} = \sum_{\lambda}\sum_{\mu} r_{\mu\lambda}\,\omega_{i\lambda}\,t_{\iota\varkappa\mu} \sum_{\lambda}\sum_{\mu}\sum_{\nu} r_{\mu\lambda}\,t_{\nu\lambda}\,r_{i\varkappa\mu}\,\zeta_{i\nu} & (\varkappa = m+1, .n) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

eine Integralmatrix von (4). Nun ist

$$(r_{\varkappa i})^{-1}\,(r_{\varkappa i}) = (\delta_{i\varkappa}) \text{ oder } (t_{i\varkappa})\,(r_{\varkappa i}) = \left(\sum_{\lambda} t_{i\lambda}\,r_{\varkappa\lambda}\right) = (\delta_{i\varkappa}), \text{ also}$$

$$\sum_{\lambda} t_{\nu\lambda}\,r_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\mu}.$$

(6) geht also über in

$$\begin{cases} z_{i\varkappa} = \omega_{i\varkappa} & (\varkappa = 1, 2, \ldots m) \\ z_{i\varkappa} = \sum_{\mu}\sum_{\nu} \delta_{\nu\mu}\,\iota_{\iota\varkappa\mu}\,z_{i\nu} = \sum_{\mu} r_{i\varkappa\mu}\,\zeta_{i\mu} = \delta_{i\varkappa} & (\varkappa = m+1, \ldots n) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

(4) hat also die Integralmatrix

$$\left\{\begin{array}{llll} \omega_{11} & \omega_{12} \ldots . & \omega_{1m} & 0\ 0 \ldots 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} \ldots . & \omega_{2m} & 0\ 0 \ldots 0 \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \omega_{m1} & \omega_{m2} \ldots . & \omega_{mm} & 0\ 0 \ldots 0 \\ \omega_{m+1,1} & \omega_{m+1,2} \ldots & \omega_{m+1,m} & 1\ 0 \ldots 0 \\ \omega_{m+2,1} & \omega_{m+2,2} \ldots & \omega_{m+2,m} & 0\ 1 \ldots 0 \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} \ldots . & \omega_{n,m} & 0\ 0 \ldots 1 \end{array}\right\}$$

woraus hervorgeht [1]), dass auch die Koeffizientenmatrix dieselbe Form hat, d. h. dass

$$b_{i\varkappa} = 0 \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots . m \\ \varkappa = m+1, \ldots n \end{array}\right)$$

[1]) Schlesinger, Vorlesungen pag. 108.

Setzt man in die $(n—m)$ letzten Gleichungen von (4) die $(n—m)$ Lösungssysteme

$$\begin{matrix} \omega_{i\varkappa} & (\varkappa = 1, 2, \ldots . m) \\ \delta_{i\varkappa} & (\varkappa = m+1, \ldots n) \end{matrix} \quad (i = m+1, \ldots n)$$

ein, so wird

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{m} \omega_{i\lambda}\, b_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=m+1}^{n} \delta_{i\lambda}\, b_{\lambda\varkappa} \quad (i, \varkappa = m+1, \ldots n)$$

Da nun $$b_{\lambda\varkappa} = 0 \begin{pmatrix} \lambda = 1\ 2, \ldots . \ m \\ \varkappa = m+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

so wird auch

$$b_{i\varkappa} = 0 \ (i, \varkappa = m+1, \ldots n)$$

Die Integration des Differentialsystems (4) *ist also zurückgeführt auf die Integration der beiden Systeme*

I $$\frac{d\, z_\varkappa}{d\, x} = \sum_{\lambda=1}^{m} b_{\lambda\varkappa}\, z\lambda \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots m)$$

II $$\frac{d\, z_\varkappa}{d\, x} = 0 \quad (\varkappa = m+1, \ldots n)$$

indem sich aus je einer Integralmatrix von I und II durch Quadraturen eine Integralmatrix von (4) gewinnen lässt, was das *Ziel der nachfolgenden Betrachtung sein soll.*

II hat die Integralmatrix $(\delta_{i\varkappa})$. Von I erhalten wir eine durch folgende Überlegung: (4) hat auch die Integralmatrix, die entsteht, wenn man in (3)

$$y_\lambda = \eta_{i\lambda} \ (i = 1, 2, \ldots n)$$

setzt, also

$$\begin{cases} z_{i\varkappa} = \eta_{i\lambda} \ (\varkappa = 1, 2, \ldots m) \\ z_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} r_{\mu\lambda}\, \eta_{i\lambda}\, \eta_{\varkappa\mu} \quad (\varkappa = m+1, \ldots n) \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

oder

(7) $$\begin{cases} z_{i\varkappa} = \eta_{i\varkappa} \ (\varkappa = 1, 2 \ldots n) \\ z_{i\varkappa} = S(\eta_i, \eta_\varkappa) \ (\varkappa = m+1, \ldots n) \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Setzt man die $(n-m)$ letzten Lösungssysteme von (7)

$$z_{i1}, z_{i2}, \ldots z_{in} \quad (i = m+1, \ldots n)$$

in die m ersten Gleichungen von (4)

$$\frac{d z_\varkappa}{d x} = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots m)$$

ein, so erhält man als Identität in x

$$\frac{d \eta_{i\varkappa}}{d x} = \sum_{\lambda=1}^{m} b_{\lambda\varkappa} \eta_{i\varkappa} + \sum_{\lambda=m+1}^{n} b_{\lambda\varkappa} S(\eta_i, \eta_\lambda)$$
$$\left(\begin{matrix} i = m+1, \; m+2, \ldots n \\ \varkappa = 1, 2, \ldots m \end{matrix} \right).$$

Haben wir nun die Lösungssysteme

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots \eta_{in} \quad (i = m+1, \ldots n)$$

gerade so gewählt, dass die Konstanten

$$S(\eta_i, \eta_\varkappa) = 0 \quad (i, \varkappa = m+1, \ldots n),$$

so wird

$$\frac{d \eta_{i\varkappa}}{d x} = \sum_{\lambda=1}^{m} b_{\lambda\varkappa} \eta_{i\lambda} \quad \left(\begin{matrix} i = m+1, \ldots n \\ \varkappa = 1, 2, \ldots m \end{matrix} \right).$$

D. h. *I hat die n—m Lösungssysteme*

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots \eta_{im} \quad (i = m+1, \ldots n)$$

Wir behaupten, dass sie *linear unabhängig* sind. In der Tat; schreiben wir (7) an:

$$\left\{ \begin{matrix} \eta_{11} & \eta_{12} \ldots \ldots \eta_{1m} & S(\eta_1, \eta_{m+1}) \ldots S(\eta_1, \eta_n) \\ \eta_{21} & \eta_{22} \ldots \ldots \eta_{2m} & S(\eta_2, \eta_{m+1}) \ldots S(\eta_2, \eta_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{m1} & \eta_{m2} \ldots \ldots \eta_{mm} & S(\eta_m, \eta_{m+1}) \ldots S(\eta_m, \eta_n) \\ \eta_{m+1,1} & \eta_{m+1,2} \ldots \eta_{m+1,m} & 0 \; 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \; 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} \ldots \ldots \eta_{nm} & 0 \; 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{matrix} \right\}$$

so sieht man sofort, da ja die Determinante dieser Matrix nicht verschwindet, dass die rechteckige Matrix

$$\eta_{i\varkappa} \left(\begin{matrix} i = m+1, \; m+2, \ldots n \\ \varkappa = 1, 2, \ldots n \end{matrix} \right)$$

vom Range $(n-m)$ ist, was mit der obigen Behauptung identisch ist. Das Differentialsystem I kann aber höchstens so viele

linear unabhängige Lösungssysteme haben, als ihre Ordnung angibt. Es ist also $n-m \leqq m$, woraus

$$m \geqq \frac{n}{2} \text{ und } \underline{n-m \leqq \frac{n}{2}}$$

Wir zeigen noch, dass falls $n = 2p$ oder $n = 2p+1$ sich immer p linear unabhängige Lösungssysteme finden lassen, die den Bilinearausdruck annullieren.

Es seien

$$y_{i\varkappa} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots 2p \\ \varkappa = 1, 2 \ldots \ldots n \end{pmatrix}$$

$2p$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$u_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{2p} s_\lambda y_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots . n)$$

$$v_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{2p} t_\lambda y_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots . n)$$

$2p$ linear unabhängige Lösungssysteme von (4), falls s_λ und t_λ konstant sind. Setzt man sie in $S(y, z)$ ein, so resultiert

$$S\left\{\sum_{\lambda=1}^{2p} s_\lambda y_{\lambda\varkappa}, \sum_{\lambda=1}^{2p} t_\lambda y_{\lambda\varkappa}\right\} \sum_{\lambda=1}^{2p}\sum_{\mu=1}^{2p} C_{\lambda\mu} s_\lambda t_\mu.$$

Hierin haben wir die Konstanten $S(\iota_\lambda, \iota_\mu)$ mit $C_{\lambda\mu}$ bezeichnet. Wie wir zeigten (§ 5) existieren immer p linear unabhängige Wertereihen

$$c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots . c_{2p}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots . p),$$

welche die bilineare Form

$$\sum_{\lambda,\mu} C_{\lambda\mu} x_\lambda y_\mu$$

annullieren. Die p Lösungssysteme

$$u_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{2p} c_\lambda^{(i)} y_{\lambda\varkappa} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots . p \\ \varkappa = 1, 2, \ldots . n \end{pmatrix}$$

sind also die gesuchten; sie sind linear unabhängig.

Die vollständige Integration von

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots . n)$$

erfolgt jetzt folgendermassen:

1. Fall. $n = 2p$.

Es existieren sicher p Lösungssysteme

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots \eta_{in} \quad (i = p+1, \ldots . 2p),$$

welche $S(yz)$ annullieren. Damit hat man aber auch eine Integralmatrix

$$\left\{\begin{matrix} \eta_{p+1,1} \ldots . \eta_{p+1,p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{2p,1} \ldots . \eta_{p+1,p} \end{matrix}\right\} \text{ von I' } \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{p} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots p)$$

und in

$$\left\{\begin{matrix} 1\,0 \ldots . 0 \\ 0\,1 \ldots . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\,0 \ldots . 1 \end{matrix}\right\} \text{ eine von II' } \frac{dz_\varkappa}{dx} = 0 \qquad (\varkappa = p+1, \ldots 2p)$$

Von dem zu integrierenden Differentialsystem

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{dz_\varkappa}{dx} = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{p} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda + \sum_{\lambda=p+1}^{2p} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda & (\varkappa = 1, 2, \ldots\ldots p) \\ \dfrac{dz_\varkappa}{dx} = 0 & (\varkappa = p+1, \ldots . 2p) \end{matrix}\right.$$

hat man in

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots . \eta_{ip}, \; 0\,0 \ldots . 0 \quad (i = p+1, \ldots . 2p)$$

p Lösungssysteme, wie man sich durch Einsetzen unmittelbar überzeugt. Man hat in

$$\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \ldots . \zeta_{ip}, \; \delta_{ip+1}, \delta_{ip+2}, \ldots . \delta_{i2p}$$
$$(i = p+1, p+2 \ldots . 2p)$$

p weitere Lösungssysteme, falls man die

$$\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \ldots . \zeta_{ip} \quad (i = p+1, \ldots . 2p)$$

so bestimmt, dass sie partikuläre Lösungssysteme der p inhomogenen Differentialsysteme

$$\frac{d z_\varkappa}{d x} = \sum_{\lambda=1}^{p} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda + b_{i\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots . p)$$
$$(i = p+1, p+2, \ldots . 2p)$$

sind. I′ ist aber das homogene Differentialsystem, das zu jedem dieser p inhomogenen Differentialsysteme gehört.

Bezeichnet man die adjungierte Matrix von

$$(\eta_{i\varkappa}) \qquad \begin{pmatrix} i = p+1, \ldots . 2p \\ \varkappa = 1, 2, \ldots . . . p \end{pmatrix}$$

mit

$$(u_{i\varkappa}) \qquad \begin{pmatrix} i = p+1, \ldots . 2p \\ \varkappa = 1, 2, \ldots . . . p \end{pmatrix}$$

so erhält man [1])

$$\zeta_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=p+1}^{2p} \eta_{\lambda\varkappa} \sum_{\mu=1}^{p} \int u_{\lambda\varkappa} b_{i\mu} \, dx$$
$$\begin{pmatrix} i = p+1, \ p+2, \ldots . 2p \\ \varkappa = 1, 2, \ldots . p \end{pmatrix}$$

Die Zusammenstellung der $2p$ Lösungssysteme gibt

$$\left\{\begin{array}{ll} \eta_{p+1,1} \ldots . \eta_{p+1,p} & 0\,0 \ldots . 0 \\ \eta_{p+2,1} \ldots . \eta_{p+2,p} & 0\,0 \ldots . 0 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \eta_{2p,1} \ldots . \eta_{2p,p} & 0\,0 \ldots . 0 \\ \zeta_{p+1,1} \ldots . \zeta_{p+1,p} & 1\,0 \ldots . 0 \\ \zeta_{p+2,1} \ldots . \zeta_{p+2,p} & 0\,1 \ldots . 0 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \zeta_{2p,1} \ldots . \zeta_{2p,p} & 0\,0 \ldots . 0 \end{array}\right\}$$

Da die Determinante dieser Matrix nicht verschwindet, ist sie eine Integralmatrix.

2. Fall. $n = 2p+1$.

Es existieren sicher p linear unabhängige Lösungssysteme

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots . \eta_{in} \quad (i = p+2, \ldots . 2p+1),$$

[1]) Für die Auflösung inhomogener Differentialsysteme siehe Schlesinger, Vorlesungen pag. 36.

welche $S(y, z)$ paarweise anullieren. Hier ist also

$$n - m = p \text{ und daher } m = p + 1.$$

Von I'

$$\frac{d z_\varkappa}{d x} = \sum_{\lambda=1}^{p+1} b_{\lambda\varkappa} z_\lambda \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots p+1)$$

kennt man also die p linear unabhängigen Lösungssysteme

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots \eta_{ip+1} \quad (i = p+2, \ldots 2p+1).$$

Durch Quadraturen lässt sich noch ein weiteres Lösungssystem

$$\eta_{p+1,1} \ldots \eta_{p+1,p+1}$$

gewinnen, sodass man von I' die Integralmatrix

$$(\eta_{i\varkappa}) \quad \begin{matrix} (i = p+1, \ldots 2p+1 \\ (\varkappa = 1, 2, \ldots p+1 \end{matrix}$$

kennt. Für

$$\text{II}' \quad \frac{d z_\varkappa}{d x} = 0 \quad (\varkappa = p+2, \ldots 2p+1)$$

bildet die Einheitsmatrix eine Integralmatrix. Die vollsändige Integration kann analog wie vorher durch Quadraturen geleistet werden.

Aus einer Integralmatrix von (4) kann man endlich jedesmal leicht eine Integralmatrix des Ausgangsdifferentialsystems (1) berechnen.

Zusammenfassend erkennen wir:

Ist $n = 2p$ oder $2p+1$, so kann aus p linear unabhängigen Lösungssystemen, die den begleitenden Bilinearausdruck paarweise zum Verschwinden bringen, eine Integralmatrix des vorgelegten Differentialsystems mit bekanntem linearen Multiplikatorensystem durch Quadraturen gewonnen werden.

VITA.

Ich Hermann Albert Grübel von Basel, wurde geboren am 20. Oktober 1883 als Sohn des Jakob Grübel († 1909) und der Amalie Grübel, geb. Pfautz († 1903) auf Schloss Buonas am Zugersee, wo mein Vater Kutscher war. Die beiden ersten Schuljahre verbrachte ich in der Gemeindeschule von Risch. Mit der Uebersiedlung meiner Eltern nach Basel trat ich in die Basler Primarschule ein und durchlief die Untere und Obere Realschule. Letztere verliess ich im Herbste 1901 nach Erlangung der Maturität und trat in die Fachlehrer-Abteilung mathematischer Richtung (Vorstand Minkowski †) der Eidg. technischen Hochschule in Zürich ein, um Mathematik, Astronomie und Physik zu studieren. Ich besuchte während 8 Semestern Vorlesungen und Uebungen vornehmlich der Herren Fiedler, Franel, Geiser, Herzog (†), Hirsch, Hurwitz, H. F. Weber (†) und Wolfer. Im Herbst 1905 erhielt ich das Diplom als Fachlehrer der Mathematik auf Grund der bestandenen mündlichen Prüfungen und einer wissenschaftlichen Arbeit über Spezialfälle der Riemannschen P-Funktion. Während des Wintersemesters 1905/06 war ich Assistent für Mathematik. Seit dem Frühjahr 1906 bin ich Lehrer an der Untern Realschule Basel.

Die vorliegende Arbeit verdanke ich einer Anregung meines verehrten Lehrers Herrn Prof. Dr. A. Hirsch, dem ich für sein stetes Wohlwollen zu tiefem Danke mich verpflichtet fühle.